第一章　预备知识和公理

§1　绪　　论

世所公认，微积分学的一般理论，是在十七世纪后半叶中，首先由牛顿（Newton），稍后由莱布尼茨（Leibniz）各自独立提出来的．但是，在他们之前，在特殊情况下寻求面积、体积和切线，不论在欧洲还是在中国，已经经历了漫长的历史．如何对这门新学科建立巩固的理论基础呢？牛顿没有固定的主张，他有时采用无限小，有时采用极限，有时采用物理直观．在欧洲大陆上，莱布尼茨及其追随者，在一阶和高阶无限小微分的基础上发展了微积分理论．他们采用的记号，有着技术上的优越性，在欧洲大陆上广泛传播，促进了微积分理论的发展和应用．

然而，随着微积分理论的进一步发展，在它的内部，由于采用无限小，出现了逻辑上的困难（我们将在§4中详细论述这个困难）．因此，有必要重新建立理论基础．十九世纪，柯西（Cauchy）首先在极限概念的基础上对微积分理论给以合理的说明，柯西的方法，后来又由维尔斯特拉斯（Weierstrass）给出更为严格和形式化的处理．哥西和外尔斯锻斯排除了无限小，在极限概念上建立了微积分．因此，自十九世纪起，无限小似乎被一劳永逸地逐出了数学．谁会料到在百余年之后，由于逻辑学的发展，美国逻辑学家鲁滨逊（Robinson）又克服了逻辑推理上的困难，在二十世纪六十年代，重新把无限小请了回来，在含有无限小的数系中合乎逻辑地建立了微积理论——非标准分析，实现了三百年之前起源于莱布尼茨的梦想．

由鲁滨逊的理论开始，形成了一股潮流，在美欧诸国，有关无限小分析的书籍如雨后春笋．它们的出现，似乎填补了百余年的空白，正在恢复历史的平衡，使得在微积分的理论中，无限小的概念和极限的概念互相争妍，平行地向前发展．有关非标准分析的大量论文和书籍，极大地丰富了近代数学．

“无限”的概念，无论在欧洲和中国都有几千年的历史．有关“无限”的问题，在许多人看来，至今仍然是数学中的首要问题．在这个永无休止地、关于有限和无限、离散和连续的漫长的历史争论中，鲁滨逊又加入了新的篇章．但鲁滨逊理论的出现，只意味着这种争论又进入了一个新的境界，而不意味着争论的结束．

由于美欧诸国已经出版了大量有关无限小分析的书籍，历史的平衡已经得到了一定的恢复，因此，作者不打算在无限小的基础上重新建立一次微积分学，而试图将标准分析与非标准分析更紧密地联系起来．

在本书之中，作者把标准分析看作是单一模型的微积分学，可以叫作单相微积分学，而把由鲁滨逊开始的非标准分析看作是二重模型的微积分学，可以取名为两相微积分学，进一步，还可以建立多重模型的微积分学，可以称之为多相微积分学．

本书论述的重点是两相微积分学，作者打算在标准分析已有理论的基础上，引入少量的假设，直接构成两相微积分学．这样的两相微积分只能作为标准分析的后继课．因此，本书除了对两相微积分学的理论结构作必要的讨论之外，作者想重点研究一下Dirac Delta函数和奇异积分两个问题，因为这两个问题，在标准分析中研究得很不完善．只在本书最后的附录中，才花少量语言勾画出多相微积分的大致轮廓．

§2 简单的逻辑知识

正如前面所提到的，在含有无限小的数系上建立微积分理论的企图，从莱布尼茨时就有了，但长时期之内并没有获得成功．因为一旦引入了无限小量，就会产生逻辑推理上的混乱．直到二十世纪六十年代，鲁滨逊才在近代数理逻辑的基础上成功地解决了这一问题．由此看来，为了建立两相微积分的理论，如果完全避开数理逻辑的知识，似乎是不大明智的．但本书又不是一本逻辑学方面的教材，主要是讨论分析学中的问题，因此过多地涉及逻辑学中的知识，也是不明智的．所以书中只介绍最简单的逻辑知识，一方面从逻辑学的角度来看，使得本书的构成基本上是合理的，另方面在不熟悉逻辑的读者看来，本书的内容仍然是不难接受和合乎常情的．

我们知道，任何一门数学理论，都是通过符号语言表达的，这些符号可以是文字、声音或者电子信号等．为了使推理严格，逻辑学家和数学家通过几千年，特别是最近三百年来的努力，已经创立了一套标准的书面语言（字符），或叫形式语言，来准确表达数学理论．现在，很多局部的数学理论，如标准分析，线性代数和群论等都是可以形式化的，即用形式语言来表达．

为了使局部数学理论形式化，本书采用下面的逻辑符号．

三个基本的逻辑连词：$\wedge$、$\vee$、$\neg$，其名称和功能如下：

$\wedge$，称之为“与”或“合取”．若A和B是两个命题，则$A\wedge B$表示A和B同时成立．

$\vee$，称之为“或”或“析取”．若A和B是两个命题，则$A\vee B$表示A和B中有一个成立．

$\neg$，称之为“非”．若A是一个命题，则$\neg A$表示A不成立．

为了把一个复合命题的结合层次表示清楚，我们采用方括

号〔，〕．例如，复合命题

$\neg A$与B中有一个成立

可表示为

$[\neg A]\vee B$

又例如，复合命题

或者是A与B同时成立，或者是C成立

可表示为

$[A\wedge B]\vee C$

两个复合逻辑连词：$\longrightarrow$、$\longleftrightarrow$，其名称和定义如下．

$\longrightarrow$，称之为"蕴含"．若A和B是两个命题，定义$A\longrightarrow B$代表$[\neg A]\vee B$．

$\longleftrightarrow$，称之为"等价"．若A和B是两个命题，定义$A\longleftrightarrow B$代表$[A\longrightarrow B]\wedge[B\longrightarrow A]$．

为了省略方括号，我们规定，逻辑连词之间的结合能力由弱到强分为三个等级：1．$\longrightarrow$，$\longleftrightarrow$；2．$\wedge$，$\vee$；3．$\neg$．例如，$[\neg A]\vee B$可简写成$\neg A\vee B$．又例如$[A\wedge B]\longrightarrow C$简写成$A\wedge B\longrightarrow C$．

以X，Y和Z代表三个命题，我们指出以下简单的命题演算的公式

(2,1) $$X\vee X\longrightarrow X$$

(2,2) $$X\longrightarrow X\vee Y$$

(2,3) $$X\vee Y\longrightarrow Y\vee X$$

(2,4) $$[X\longrightarrow Y]\longrightarrow[Z\vee X\longrightarrow Z\vee Y]$$

(2,5) $$X\longrightarrow[Y\longrightarrow X]$$

(2,6) $$[X\longrightarrow[Y\longrightarrow Z]]\longrightarrow[[X\longrightarrow Y]\longrightarrow[X\longrightarrow Z]]$$

(2,7) $$\neg[X\wedge Y]\longleftrightarrow\neg X\vee\neg Y$$

(2,8) $$\neg[X\vee Y]\longleftrightarrow\neg X\wedge\neg Y$$

(2,9) $[X \longrightarrow [Y \longrightarrow Z]] \longleftrightarrow [X \wedge Y \longrightarrow Z]$

(2,10) $[X \longrightarrow Z] \longrightarrow [X \wedge Y \longrightarrow Z]$

(2,11) $[X \longrightarrow Y]$

$\longrightarrow [[X \wedge Y \longrightarrow Z] \longleftrightarrow [X \longrightarrow Z]]$

(2,12) $[X \longrightarrow Y] \wedge [Y \longrightarrow Z] \longrightarrow [X \longrightarrow Z]$

关于以上公式，读者可参阅后面注明的参考资料〔21〕，〔27〕或〔35〕等.或者仔细思索一下，也不难看出以上公式是正确的.

两个逻辑量词：（$\exists$）和（$\forall$），前者叫存在量词，后者叫全称量词.若$A(x)$代表依赖于变量x的关系，则（$\exists x$）$A(x)$表示"存在x使得关系$A(x)$成立.又（$\forall x$）$A(x)$表示"对全体x而言关系$A(x)$都成立".

若$A(x)$和$F(x)$是依赖于变量x的关系，对于含有量词的谓词演算，有以下简单公式

(2,13) $(\exists x)A(x) \longleftrightarrow \neg(\forall x)\neg A(x)$

(2,14) $(\exists x)\neg A(x) \longleftrightarrow \neg(\forall x)A(x)$

(2,15) $\neg(\exists x)A(x) \longleftrightarrow (\forall x)\neg A(x)$

(2,16) $\neg(\exists x)\neg A(x) \longleftrightarrow (\forall x)A(x)$

(2,17) $(\forall x)F(x) \longrightarrow F(b)$，这里$b$可以是任意的常量.

(2,18) $F(b) \longrightarrow (\exists x)F(x)$，$b$是某个常量.

(2,19) $(\forall x)[X \vee F(x)] \longleftrightarrow X \vee (\forall x)F(x)$

(2,20) $(\forall x)[X \wedge F(x)] \longleftrightarrow X \wedge (\forall x)F(x)$

(2,21) $(\exists x)[X \wedge F(x)] \longleftrightarrow X \wedge (\exists x)F(x)$

(2,22) $(\exists x)[X \vee F(x)] \longleftrightarrow X \vee (\exists x)F(x)$

(2,23) $(\forall x)[X \rightarrow F(x)] \longleftrightarrow [X \rightarrow (\forall x)F(x)]$

(2,24) $(\exists x)[X \rightarrow F(x)] \longleftrightarrow [X \rightarrow (\exists x)F(x)]$

(2,25) $[(\forall x)F(x) \rightarrow X] \longleftrightarrow (\exists x)[F(x) \rightarrow X]$

(2,26) $[(\exists x)F(x) \rightarrow X] \longleftrightarrow (\forall x)[F(x) \rightarrow X]$

以上这几个公式很简单，读者可以参考一下〔21〕，〔27〕或〔35〕

等书籍，或者稍加思索，就可以弄明白。

§3 类　　型

我们在标准分析中所碰到的对象，如果仔细加以考虑，就会发现它们具有不同的类型.例如，0，1，1/2，π，… 等，其中每个只是单个的实数；区间[0,1]，(1/2，π) 等则是实数的集合；函数$y=\sin x$是二维平面上的一个点集，函数$z=e^{x^2y^2}$是三维空间的一个点集。我们可以采用类型论的方法对这些不同的对象加以分类。

我们规定，单个实数的类型是 0，实数集合的类型是(0)，二维平面上点集的类型是(0，0)，三维空间中点集的类型是(0，0，0)，n维欧氏空间中点集的类型是(0，0，…，0)，共n个 0。

一元函数，如$y=\sin x$，是平面上的点集，所以它的类型是（0，0）.类似，二元函数的类型是（0，0，0），等等。

又如积分关系

$$I=\int_a^b \sin x dx, \tag{3,1}$$

其中I，a，b是 0 型的，$\sin x$是（0，0）型的，所以积分关系(3,1) 的类型是（0，0，0，(0，0)）。

类型的一般定义如下：

1. 0 是一个型；

2. 若τ_1，τ_2，…，τ_n是型，则（τ_1，τ_2，…，τ_n）也是一个型，其中n是正整数。

由有限归纳法，对标准分析中所有对象都能给出其类型。这样，标准分析的理论就是关于实数线R上的各型对象（数和各型关系式）的命题和语句的集合.我们以M代表标准分析的理论，以Γ代表M中出现的各型常量对象的集合，则R是Γ中 0

型常量对象的子集合.

请注意，等号"="是可以分类型的.例如：$6=2\times 3$，这是两个0型个体的相等，可以写作$6=_{(0,0)}2\times 3$.又如$\sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$是两个一元函数的相等，注意到一元函数的类型是（0，0），则可以记作$\sin x=_{((0,0)(0,0))}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$．一般地，对于两个$\tau$型对象，必要时，其相等可以记作"$=_{(\tau,\tau)}$".

我们一般以ϕ表示空集合.空集合也是有类型的，如空的实数集的类型是（0），可以记为$\phi_{(0)}$，平面上空点集可以记为$\phi_{(0,0)}$.一般地，τ型空集合可记作ϕ_{τ}.

§4 标准实数线公理系

在十七世纪牛顿和莱布尼茨的时代，微积分学还只是一种描述性质的科学．到十九世纪，通过柯西，维尔斯特斯和狄特金（Dedekind）等人的相继努力，终于把零散的材料组织起来，形成了实数线的公理．全部标准分析的理论就建立在这些实数线的公理之上，读者可参看Steen[48].

本书以R代表实数线，R是个集合，它的元素叫实数，满足以下两组公理.

公理（4.1），R是有序域，即关于R有以下10条性质：

1.存在加法和乘法　若x和y是实数，则$x+y$和xy亦是；

2.结合律　若w，x和y是实数，则

$$(w+x)+y=w+(x+y)$$
$$(wx)y=w(xy);$$

3.交换律　若x和y是实数，则

$$x+y=y+x$$
$$xy=yx;$$

4. 分配律　若w，x和y是实数，则

$$w(x+y)=wx+wy;$$

5. 存在单位　存在两个常实数0（加法单位）和1（乘法单位），使得对任意一个实数x，成立

$$x+0=x$$

$$x1=x;$$

6. 存在加法逆　若x是实数，则存在实数$(-x)$使得

$$x+(-x)=0,$$

称$(-x)$为x的加法逆；

7. 存在乘法逆　若x是实数且$x\neq 0$，则存在实数x^{-1}使得

$$xx^{-1}=1,$$

称x^{-1}为x的乘法逆；

8. 成立三择一性　若x和y是实数，则

$$x<y,\quad x=y,\quad y<x$$

三者成立且仅成立一个；

9. 成立传递性　若$w<x$和$x<y$，则$w<y$；

10. 成立保序性　若$x<y$，则$x+w<y+w$；若$x<y$和$0<w$，则

$$xw<yw.$$

以上十组性质称为有序域的公理。

此外，R还满足：

公理（4，2），R是完备的．即是，设E是实数的非空集合，如果E有上界（即存在实数x，使得不等式$y<x$对E的所有的数y成立），则E具有最小上界（即存在E的一个上界x_0，它小于或等于E的其他任何一个上界）．

总起来说，实数线R是一个完备的有序域。

三百年来，微积分学取得了辉煌的成就，它的基础就是实数线．有人把实数线喻为数学之帝座，这不是没有道理的．

一旦有关实数性质的零散材料组成了完备有序域的公理系统，人们就很容易发现，无限小量的存在与完备性公理（4，2）是互相矛盾的。如果设R中有一个正的无限小量ε，则ε应小于每一个正的常规实数，并且对任意一个正整数m，ε的m倍，即$m\varepsilon$，仍然是无限小量。这样，若以$\mathscr{M}$代表ε的所有正整数倍的数所组成的集合，则$\mathscr{M}$的每个元素都是无限小量。于是$\mathscr{M}$有很多的上界，但$\mathscr{M}$没有最小的上界。若不然，设b是$\mathscr{M}$的最小上界，则$b-\varepsilon$仍是$\mathscr{M}$的最小上界，这就导致了矛盾。这确切地表明了：无限小量的存在与实数线的完备性是互相矛盾的。在十九世纪逻辑学的水平上，这个矛盾没有得到解决，于是柯西和维尔斯特斯不得不完全放弃无限小而采用极限概念。

在微积分的理论中集合的概念是必不可少的，本书中采用的集合论符号有$\in$、$\subseteq$、$\cap$、$\cup$、$\setminus$，它们的功能如下。

若a是某元素，A和B是集合，则$a\in A$表示a是A的元素，$A\subseteq B$表示A是B的子集；$A\cap B$表示A和B的交集；$A\cup B$表示A和B的并集；$A\setminus B$表示A的所有不属于B的元素所组成的集合。

由单个元素x所组成的集合以$\{x\}$表示。由此有满足关系P的x所组成的集合记为$\{x \mid p\}$。

为了表示简洁，可省略方括号。本书中主要的数学符号，按结合能力，由弱到强，分为七个等级：

1.$\rightarrow$、$\longleftrightarrow$；2.$\wedge$、$\vee$；3.$\neg$；

4.$\in$、$\subseteq$、$<$、$=$；5.$\cap$、$\cup$、$\setminus$；

6.$+$、$-$；7.$\div$（$/$）、$\cdot$（乘号，可省略）。

在同一级中，各符号的结合能力相同。

关于变量的取值范围，与鲁滨逊[46]一样，每个变量只能在同一型的对象（实数，或某型关系）中取值。例如，变量x，如果它是取实数值的，那么它就不能代表数的集合或其他

型的关系．或者说，变量 x 的型是确定的．

为了简单地表示型，还引进一个缩写符号．变量 x 是 s 型的，记为$x\tilde{T}s$．例如，x 代表实数，实数的型是o，则记为$x\tilde{T}o$；又如y表示实数集，实数集的型是（0），则化作 $y\tilde{T}$（0），等等．

例如，有序域公理（4,1）的第一条性质可形式化为：

（4,3）　　$(\forall x\tilde{T}o)(\forall y\tilde{T}o))[x+y\in R\wedge xy\in R]$．而完备性公理(4,2)可以半形式化地写作

（4,4）　　$(\forall x\tilde{T}(0))[x$ 非空有上界→ x 有最小上界]．

作为一个基本出发点，我们承认，标准分析的每个命题和语句都是可以形式化的．

§5　两相实数线公理系

上节已指出，完备性公理(4,2)与无限小的存在是互相矛盾的．在历史上，由于这个矛盾竟把无限小逐出了微积分学的大门．这就是为了保存完备性公理而排斥无限小．这是保持理论协调性的一种方法。应该能够想到，为了保持理论的协调性，还有另外一种方法，这就是承认无限小的存在而限制完备性公理的普遍性．由于这种限制的规则较难发现，直到二十世纪六十年代，才由鲁滨逊完成了这项历史任务．根据鲁滨逊〔40〕第二章的结果和张锦文的研究（其中部分内容写在〔26〕中），我们依次引入以下公设．

公设（5,1），假设存在一个非阿基米德（Archimedes）域 $*R$，它是R的扩大．更确切地说，假设存在一个有序域 $*R$（即它满足公理（4,1）的10条性质），并满足以下两条：

1.R可以嵌入 $*R$成为一个有序子域，即 $*R$存在一个有序子域R_1，它与R代数同构．我们称R_1中的数为 $*R$中的标准数。在比较放松的情况下，我们把R_1看作与R是同一的；

2. $^*R$中存在无限小量，即$^*R$中存在某正数ε，它小于R中的每一个正数.

根据上节的讨论，立即可以看出，$^*R$是不完备的。此外，不难看出，$^*R$中存在无限大量. 实际上，若ε是$^*R$中正的无限小量，则$1/\varepsilon$是无限大量，它比R中的任何一个正实数都大。

注意到§3中关于类型的讨论，$^*R$上的对象也可以分为各种类型. 我们以M_2表示$^*R$上建立的全部理论，则M_2是由关于$^*R$上各型对象的命题和语句组成. 为了方便，我们以Γ_2代表M_2中出现的各型常量对象的集合.

$^*R$是不完备的，但并不是$^*R$的所有子集都不满足完备性公理的要求。更确切地说，并不是$^*R$的任何有界子集都没有最小上界. 例如，$^*R$中的闭区间$[a,b]$，它由满足$a\leqslant x\leqslant b$的所有$^*R$的数x所组成，不难看出$[a,b]$的最小上界就是b. 这样，我们有权设想，$^*R$的一部分子集是满足完备性公理的要求的，即$^*R$的部分子集，由它们的有界性可推得它们有最小上界. 但是，我们的真正目的不只是要求一个完备性公理，而是要在$^*R$的部分对象上建立起全部微积分理论。而且我们是在承认标准分析，即M的协调性的前提之下继续工作的. 因此，与其在$^*R$上先建立一个完备性公理，然后重新用推论的方法逐步建立众所周知的分析理论，还不如直接了当地假设M中的全部命题和语句在$^*R$的部分对象（数，部分关系）上成立.

为此，我们再明确一下，M中任何一个命题或语句s，都是由R上的某型关系，在相应的位置上填入合适的常量或某型变量，再适当地对变量加上量词而构成的. 譬如，（4,3）和（4,4）就是这种例子. 又，s的某个变量的取值范围，就是R上此型常量的全体. 再请回忆一下，R上各型常量对象的集合，即M中出现的各型常量对象的集合Γ.

在作了以上说明之后，我们引入以下公设.

公设（5,2），标准分析的理论M可以在Γ_2的部分对象上扩大成为微积分理论$*M$.如果以$*\Gamma$记$*M$中出现的各型常量对象的集合，则$*\Gamma$是Γ_2的子集.更确切地说，成立以下性质：

1.常量的对应　设$*\Gamma$存在一个子集合Γ_1，并存在一个由Γ到Γ_1的双方单值的映射，称之为$*$——映射.$*$——映射保持R与R_1之间的同构，把（0）型常量R对应到$*R$.Γ中每个常量a，通过$*$——映射，它在Γ_1中所对应的那个常量被记为$*a$，而且对应前后的常量其类型相同.Γ_1的对象被称为$*\Gamma$的标准对象，$*\Gamma$的其他对象则是非标准的.$*\Gamma$的对象被称为Γ_2的内对象，Γ_2的其他对象则是外对象.在不必拘泥的情况下，我们把Γ和Γ_1看成是同一的.

2.含变量的关系的对应　若$A(x_1,\cdots,x_i,a_1,\cdots,a_j)$是$M$中的一个关系，其中$x_1,\cdots,x_i$是变量，$a_1,\cdots,a_j$是常量，$1\leqslant i+j$，$i$与$j$是非负整数，通过$*$——映射变成为$*M$的关系$*A(x_1,\cdots,x_i,*a_1,\cdots,*a_j)$.但需注意，前者变量的变域在$\Gamma$中，后者在$*\Gamma$中.

又若$B(x_1,\cdots,x_i,b_1,\cdots,b_j)$是$*M$的关系，其中$x_1,\cdots,x_i$是变量，$b_1,\cdots,b_j$是常量，$1\leqslant i+j$，$i$与$j$是非负整数，则在$M$中存在常量$A$使得$*A=B$，或者更明确一点写成

$$*A(x_1,\cdots,x_i,y_1,\cdots,y_j)$$
$$=B(x_1,\cdots,x_i,y_1,\cdots,y_j).$$

而且在Γ中存在$a_1,\cdots,a_j$使得$A(x_1,\cdots,x_i,a_1,\cdots,a_j)$是$M$的关系.请注意，上式中$y_1,\cdots,y_j$是变量，$a_1,\cdots,a_j$是常量，而且关系式中每个位置上的类型是确定的.

3.由M到$*M$的命题或语句的转换　设s是M中的一个命题或语句，通过$*$——映射，将s中的每个常量，如a，都换为$*a$，又将s中每个变量的变域由Γ扩大为$*\Gamma$中同型的全体

常量，那么 s 就变为在 $*M$ 成立的一个命题或语句。

4. 由 $*M$ 到 M 的命题或语句的转换　设 p 是 $*M$ 的一个命题或语句，如果其中所有的常量 b_1，…，b_j 都是标准的，只要将 p 中每个变量的变域限制到 Γ_1 中同型的全体常量，则 p 成为 M 的命题或语句。如果常量中有几个，譬如 b_1，…，b_i，$i \leqslant j$，是非标准的，则一定存在标准的 a_1，…，a_i，它们的型依次与 b_1，…，b_i，相同，在 p 中依次以 a_1，…，a_i 代替 b_1，…，b_i，并将每个变量的变域限制到 Γ_1 中同型的全体常量，所得到的即为在 M 成立的命题或语句。

我们的两条公设介绍完了。

显然，$*M$ 中有些语句在 M 中是没有的。例如，当 B 是 $*R$ 中的无限大时，成立

(5,3)　　$B + B = 2B$

这样的公式在 M 中是没有的，所以 $*M$ 是 M 的真扩大。

由于公设（5,2）有点抽象，所以需要做点解释。当然，更多的解释在 2，3 和 4 章中做出。

设 A 是 Γ 中的常量，通过 $*$ ——映射对应着 $*\Gamma$ 中的常量 $*A$。如果 A 不是 o 型的，则 $*A$ 与 A 所包含的意义是不完全相同的。例如，在 Γ 中实数的全体是 R，在 $*\Gamma$ 中，实数的全体是 $*R$。但 $*R$ 与 R 有明显的不同，即 $*R$ 中含有无限大量和无限小量。

在 Γ 中，自然数集为 N，在 $*\Gamma$ 中，自然数集为 $*N$。但 $*N$ 与 N 也有性质上的差别。因为在 M 中成立下面的语句

(5,4)　　$(\forall x)[x \in R \wedge o < x \rightarrow (\exists n)$
　　　　$[n \in N \wedge n - 1 < x \leqslant n]]$

由公设（5,2），通过 $*$ ——映射，在 $*M$ 成立语句

(5,5)　　$(\forall x)[x \in *R \wedge o < x \rightarrow (\exists n)$
　　　　$[n \in *N \wedge n - 1 < x \leqslant n]]$。

由于$*R$有无限大，从（5,5）可以看出，$*N$也有无限大，即存在无限大的自然数，它们是$*N$中的非标准数。

Γ中任何一个有限集合$\{a_1,a_2,\cdots a_n\}$，通过*——映射，变成$*\Gamma$中的集合$\{*a_1,*a_2,\cdots,*a_n\}$，它仍然是$*\Gamma$中的标准有限集。

设A是Γ的可数无限集，那么存在一个函数f，它构成A与N之间的双方单值的映射，使得

$$A=\{f(1),f(2),\cdots,f(n),\cdots\}$$

其中$n\in N$，

上述语句，通过*——映射，在$*M$则变为：

$*A$是$*\Gamma$的*〔可数无限集〕，那么存在一个函数$*f$，它构成$*A$与$*N$之间的双方单值的映射，使得

(5,6) $$*A=\{*f(1),*f(2),\cdots,*f(n),\cdots\}$$

其中$n\in *N$。

当n是$*N$的标准自然数时，$f(n)$通过*——映射所对应的即$*f(n)$。当n是$*N$的无限大自然数时，$*f(n)$所表示的就不是$*A$的标准元素了，即$*A$是A的真扩大，

这表明了，若A是Γ中的可数无限集时，通过*——映射，它在$*\Gamma$中所对应的$*A$中存在不属于A的元素，它可能是$*\Gamma$的非标准元素。

由公设(5,2)，通过*——映射，从(4,4)得到$*M$的语句

(5,7) $(\forall x\,\tilde{T}(0)$〔x非空有上界→x有最小上界〕

即完备性公理在$*M$成立，这里的x是在$*\Gamma$中变化的。

如果不加以限制，$*R$上的集合是可以不满足完备性公理的要求的。例如，$*R$中无限小量的全体所组成的集合，它有上界而无最小上界。因此在$*M$之外，对$*R$的子集还成立以下命题

(5,8) $(\exists x\,\tilde{T}(o))$〔$x$非空有上界$\wedge$ x没有最小上界〕。

这就是说，在 $^*M$ 之外，对于 $^*R$ 上的各型对象，即 Γ_2 的元素，还成立另外的命题和语句．也就是说，M_2 真的比 $^*M$ 广大，或者说，$^*M$ 真的只是 M_2 的一部分．因为我们已经提供了一个例子，命题(5,8)在 M_2 成立，而在 $^*M$ 则不成立．

这样，我们就需同时研究三个理论模型，M，$^*M$ 和 M_2。现在，我们确定一下名称：称 M 为标准分析或第一相的微积分，称 M_2 为第二相的微积分，称 $^*M$ 为第二相的内的微积分。称不属于 $^*M$ 的所有的 M_2 的那些关系或命题为外关系或外命题，称不属于 $^*\Gamma$ 的所有的 Γ_2 的对象为外对象．称 R 为标准实数线或第一相的实数线，称 $^*R$ 为非标准的实数线或第二相的实数线．

作者认为：从研究单一模型 M 的标准分析发展为研究二重模型的两相微积分学，即研究 M，$^*M$ 和 M_2 以及它们之间的关系，这是微积分学的重大发展．从二重模型发展为研究多重模型，即研究多相微积分，是今后值得注意的一个方向．

本节引入的两组公设，特别是公设(5,2)，可能还会使人们感到不具体，需要在以后三章中通过大量的使用而不断具体化．

第二章　几个基本问题

上一章已经说明．我们研究的微积分模型有M，$*M$和M_2。因此，很容易发生概念上的混淆．所以有必要通过具体问题，将这三个理论反复比较，搞清它们的异同．

对于M和$*M$的异同，我们采取的方法是通过$*$——映射．从符号上加以区分．例如，Γ的常量A通过$*$一映射对应$*A$．虽然在$*M$的范围内，我们看不出A与$*A$有什么实质性的差别．但是由于$*A$不仅是$*\Gamma$的对象，而且也是Γ_2的对象．因此$*A$除了在$*M$所具有的性质之外，还会有一些M_2中的性质．例如，$*R$中有无限大的数，这就是$*R$在M_2中的性质，而R在M中没有这个性质．我们对$*\Gamma$中的每个对象，必须注意到这种差别．

另一点，$*M$只是M_2的子理论，$*M$中的很多命题和语句，在M_2中常常是不成立的．为此，我们必须把$*M$的主要命题和语句在M_2中表示出来，然后在M_2中引入与它们相类似的命题和语句，并考察一下它们的异同．

由此确定本书的主要构成方法，先把M的主要命题和语句写出来，通过$*$一映射，化为$*M$的命题和语句．这样，至少在符号上将它们区分开来，把它们看作不同模型中的对象．进一步，对于这些由M中转化而来的$*M$中的命题和语句，我们进一步考察一下在M_2中是否成立类似的命题和语句，有什么相同和不同。

所以，我们首先将不厌其烦地去考察每个基本概念，如第二、三、四章所讨论的，然后引进一点新的概念，如第六和第

七章所讨论的。

在第二，三、四章中，在转换和比较M，$*M$和M_2的命题和语句时，为了方便，我们常常以“l，m，n，…，x，y，z，ε，δ，φ，…”等表示变量，以“a，b，c，…，i，j，k，0，1，2，…”表示常量。第四章以后，读者可根据上下文和具体情况判断常量和变量。

§6 命题和语句转换的原则

为了讨论$*M$和M_2两个理论的异同，我们必须把$*M$的命题和语句在M_2中表示出来，然后才能在M_2中进行比较。

为了把$*M$中的命题和语句在M_2中表示出来，我们采用以下三个原则。

(6,1) 1.若$A(a_1, \cdots a_j)$是M_2的一个关系式，$j \in N$，则：
在$*M$中$A(a_1, \cdots, a_j)$成立$\longleftrightarrow$在M_2中成立$A \in *\Gamma \wedge a_1 \in *\Gamma \wedge \cdots \wedge a_j \in *\Gamma \wedge A(a_1, \cdots, a_j)$；

2.若$A(x)$是M_2的一个关系，则：
在$*M$成立$(\forall x)A(x) \longleftrightarrow$在$M_2$成立$A \in *\Gamma \wedge (\forall x)[x \in *\Gamma \longrightarrow A(x)]$；

3.若$A(x)$是M_2的一个关系，则：
在$*M$成立$(\exists x)A(x) \longleftrightarrow$在$M_2$成立$A \in *\Gamma \wedge (\exists x)[x \in *\Gamma \wedge A(x)]$。

注意，利用(2·20)，(6,1)的第2条原则还可以写成

(6,2) 在$*M$成立$A(x) \longleftrightarrow$在M_2成立$A \in *\Gamma \wedge [x \in *\Gamma \longrightarrow A(x)]$，

其中等价号两端的x是任意变化的。

注意：(6·2)也是我们今后常用的一个公式。

作为使用上述原则的例子，讨论一下函数概念。我们知道，

一元函数是自变量和因变量之间的二元关系．若t是个函数关系，自变量x和因变量y满足函数关系t，记为$t(x, y)$成立（习惯上记为$y=t(x)$）．与Robinson〔46〕相一致，我们如下定义函数（请注意，此定义只保证函数值的唯一性）．在M中

(6,3)　　t是(τ_1, τ_2)型函数$\longleftrightarrow(\forall x\tilde{T}\tau_1)(\forall y\tilde{T}\tau_2)(\forall z\tilde{T}\tau_2)[t(x, y)\wedge t(x, z)\longrightarrow y=z]$.

通过＊一映射，(6,3)变成＊M中的语句

(6,4)　　t是(τ_1, τ_2)型＊〔函数〕$\longleftrightarrow\forall x\tilde{T}\tau_1)(\forall y\tilde{T}\tau_2)(\forall z\tilde{T}\tau_2)[t(x, y)\wedge t(x, z)\longrightarrow y *= z]$,

其中“＊＝”是Γ中的“＝”通过＊一映射在＊Γ中的象，＊〔函数〕是M中的“函数”通过＊——映射在＊Γ中的象．另一个值得注意之点是，(6•4)和(6•3)中的t是一个变量，(6•4)中t的取值范围是＊Γ的(τ_1, τ_2)型关系，而(6,3)中的t的取值范围是Γ中的(τ_1, τ_2)型关系．在M_2中

(6,5)　　t是(τ_1, τ_2)型M_2〔函数〕$\longleftrightarrow(\forall x\tilde{T}\tau_1)(\forall y\tilde{T}\tau_2)(\forall z\tilde{T}\tau_2)[t(x, y)\wedge t(x, y)\longrightarrow y={}_2 z]$,

其中“M_2〔函数〕”表示M_2中的函数，“$={}_2$”表示M_2中的相等，如果局限在＊M上，则“$={}_2$”与“＊＝”的意义相同．另一点值得注意的是(6,5)中t的变化范围是Γ_2，因此比(6•4)要大．

为了以后推理的方便，我们建立如下的引理．

引理(6,6)，设A是Γ中某型集合，通过＊——映射，A对应着＊A，又B是Γ_2中同型集合，如果成立

(6•7)　　$x\in *\Gamma\longrightarrow[x\in *A\longleftrightarrow x\in B]$,

则成立

(6,8)　　$x\in *A\longleftrightarrow x\in *\Gamma\wedge x\in B$.

证明：首先证明$x\in *A\longrightarrow x\in *\Gamma\wedge x\in B$．由于＊$A\in *\Gamma$，所以＊$A$的元素是＊$\Gamma$的对象，即成立

(6,9)　　$x\in *A\longrightarrow x\in *\Gamma$

又因$x\in{}^*A\longrightarrow x\in{}^*A$，故成立

(6,10) $\quad x\in{}^*A\longrightarrow x\in{}^*A\wedge x\in{}^*\Gamma$

由(2,9)和(6•7)推得

(6,11) $\quad x\in{}^*\Gamma\wedge x\in{}^*A\longrightarrow x\in B$

由(6,10)、(6,11)和(2•12)得

(6,12) $\quad x\in{}^*A\longrightarrow x\in B$

由(6,9)和(6,12)得

(6,13) $\quad x\in{}^*A\longrightarrow x\in{}^*\Gamma\wedge x\in B$

现在反过来证明：$x\in{}^*\Gamma\wedge x\in B\longrightarrow x\in{}^*A$。由(6,7)得

(6,14) $\quad x\in{}^*\Gamma\longrightarrow[x\in B\longrightarrow x\in{}^*A]$

利用(2,9)知，(6,14)可变形为

(6,15) $\quad x\in{}^*\Gamma\wedge x\in B\longrightarrow x\in{}^*A]$

引理(6,6)证完。

利用(6,1)的第2个原则，在(6,4)中把t看成常量，我们有

(6•16) $\quad t$是$(\tau_1,\ \tau_2)$型*〔函数〕$\longleftrightarrow t\in{}^*\Gamma(\forall x\tilde{T}\tau_1)$
$(\forall y\tilde{T}\tau_2)(\forall z\tilde{T}\tau_2)[x\in{}^*\Gamma\wedge y\in{}^*\Gamma\wedge z\in{}^*\Gamma$
$\longrightarrow[t(x,\ y)\wedge t(x,\ z)\longrightarrow y={}_2z]]$

这里有两点值得注意，因为(6•4)对所有的函数t成立，特别当t为某个常量（即固定的函数）时也成立，这是第一点。第二点是我们应用(6,1)的第3原则到(6,4)的右端，将它变为M_2中的语句，用这就是(6,16)的右端。

我们知道，$t\in{}^*\Gamma$表示t是${}^*\Gamma$的对象，又$t(x,\ y)$表示x和y是满足t的对象，或者说，x和y是关系t中的对象。因此成立

(6,17) $\quad t\in{}^*\Gamma\longrightarrow[t(x,\ y)\longrightarrow x\in{}^*\Gamma\wedge y\in{}^*\Gamma]$

(6,18) $\quad t\in{}^*\Gamma\longrightarrow[t(x,\ z)\longrightarrow x\in{}^*\Gamma\wedge z\in{}^*\Gamma]$

利用(2,9)、(2,10)、(2,20)和以上两式，(6,16)的右端可以改写为

(6,19) $t\in {}^*\Gamma\wedge(\forall x\tilde{T}\tau_1)(\forall y\tilde{T}\tau_2)(\forall z\tilde{T}\tau_2)[t(x,\ y)\wedge t(x,\ z)\longrightarrow y=_2 z]$.

将(6,19)与(6,5)的右端比较，注意到(6,19)即为(6,16)的右端. 则(6,16)变为

(6,20) t是$(\tau_1,\ \tau_2)$型$*$〔函数〕$\longleftrightarrow t\in {}^*\Gamma\wedge t$是$(\tau_1,\ \tau_2)$型的$M_2$〔函数〕.

请注意，在(6,20)中t可以是任意常量.

(6,20)是本书的一个基本关系，为了可靠，我们再换一种方法来证明.如果把(6,4)中的t看成变量，则成立$(\forall t$〔(6,4)〕.按(6,1)的第2原则，可得在M_2成立$(\forall t)[t\in {}^*\Gamma\longrightarrow$(6,4)〕，具体写出来是

(6,21) $t\in {}^*\Gamma\longrightarrow$〔$t$是$(\tau_1,\ \tau_2)$型$*$〔函数〕$\longleftrightarrow$ $(\forall x\tilde{T}\tau_1)(\forall y\tilde{T}\tau_2(\forall z\tilde{T}\tau_2)\ [t\ (x,\ y)\wedge t\ (x,\ z)\longrightarrow y *= z]]$

将(6,21)最后一式与(6,5)比较，并注意到$t\in {}^*\Gamma$，因而"$*=$"与"$=_2$"含义相同.所以成立

(6,22) $t\in {}^*\Gamma\longrightarrow$〔$t$是$(\tau_1,\ \tau_2)$型$*$〔函数〕$\longleftrightarrow t$是$(\tau_1,\tau_2)$型$M_2$〔函数〕〕.

如果以$*A$代表$(\tau_1,\ \tau_2)$型的$*$〔函数〕，以B代表$(\tau_1,\ \tau_2)$型的M_2〔函数〕，利用引理(6,6)得

(6,23) t是$\tau_1,\ \tau_2)$型$*$〔函数〕$\longleftrightarrow t\in {}^*\Gamma\wedge t$是$(\tau_1,\ \tau_2)$型$M_2$〔函数〕.

这又一次证明了(6,20).

(6,20)表示了$*M$和M_2中函数概念的差别.

§7 第二相实数的定义方法

在标准分析中，可以通过有理数定义实数.那么，在M_2中又如何通过有理数来定义第二相的实数，即$*R$的元素呢？这

是一个耐人寻味的问题。如果以Q记R中有理数的集合，通过 * ——映射，则 * Q代表 * R的有理数集合。为了明确，我们称N，Q和R分别是第一相的自然数集，有理数集和实数集，称 * N， * Q和 * R为第二相的自然数集，有理数集和实数集。有时，为了醒目，我们记

$$*N = N_2, \quad *Q = Q_2, \quad *R = R_2.$$

这样，可以更清楚地表明在哪一相讨论问题。

为了在 * Q的基础上定义 * R的元素，我们回忆一下在Q的基础上如何定义R的元素。在M中这种定义可以如下进行：

(7,1)　　r是R的实数$\longleftrightarrow(\exists p)(\exists q)[p$是$N$到$Q$的升函数 $\wedge q$是N到Q的降函数

$$\wedge \lim_{n\to\infty}(q(n)-p(n)) = 0$$

$$\wedge r = \bigcap_{n\in N}(p(n),\ q(n))].$$

通过 * ——映射，在 * M可以这么说：

(7,2)　　r是 * R的实数$\longleftrightarrow(\exists p)(\exists q)[p$是 * N到 * Q的升 * [函数]$\wedge q$是 * N到 * Q的降 * [函数]

$$\wedge *\lim_{n\to *\infty}(q(n)-p(n)) = 0$$

$$\wedge r = \bigcap_{n\in *N}(p(n),\ q(n))].$$

在(7,1)和(7,2)中，p和q是约束变量（即前面有量词限制的），r是自由的（非约束的）变量，n是约束的变量。

为了把(7,1)和(7,2)各项的意义说得更确切，我们再作以下解释。

在M中我们有

(7,3)　　p是N到Q的函数$\longleftrightarrow p$是$(o,\ o)$型函数$\wedge(\forall n)$ $[n\in N\longrightarrow(\exists y)[y\in Q\wedge y=p(n)]]$，

(7,4)　　p是N到Q的升函数$\longleftrightarrow p$是N到Q的函数$\wedge(\forall s)$

$(\forall n)[s\in N\wedge n\in N\wedge s<n\longrightarrow p(s)<p(n)]$,

(7,5) q是N到Q的降函数$\longleftrightarrow q$是N到Q的函数$\wedge(\forall s)$ $(\forall n)[s\in N\wedge n\in N\wedge s<n\longrightarrow p(n)<p(s)]$,

(7,6) p是N到Q的函数$\longrightarrow[\lim_{n\to\infty}p(n)=0\longleftrightarrow(\forall\varepsilon)$ $(\exists s)(\forall n)[\varepsilon\in R\wedge\varepsilon>0\longrightarrow[s\in N\wedge[n\in N\wedge s<n\longrightarrow|p(n)|<\varepsilon]]]]$.

在(7,6)式中，绝对值“$||$”的确切含义是它满足以下语句

(7,7) $(\forall x)[x\in R\wedge o\leqslant x\longrightarrow|x|=x]\wedge(\forall x)[x\in R\wedge x<o\longrightarrow|x|=-x]$.

通过＊一映射，将以上五式转到＊M，我们有

(7,8) p是＊N到＊Q的＊[函 数]$\longleftrightarrow p$是(o, o)型＊[函数]$\wedge(\forall n)[n\in *N\longrightarrow(\exists y)[y\in *Q\wedge y=p(n)]]$,

(7,9) p是＊N到＊Q的升＊[函数]$\longleftrightarrow p$是＊N到＊Q的＊[函数]$\wedge(\forall s)(\forall n)[s\in *N\wedge n\in *N\wedge s<n\longrightarrow p(s)<p(n)]$,

(7,10) p是＊N到＊Q的降＊[函数]$\longleftrightarrow q$是＊N到＊Q的＊[函数]$\wedge(\forall s)(\forall n)[s\in *N\wedge n\in *N\wedge s<n\longrightarrow p(n)<p(s)]$,

(7,11) p是＊N到＊Q的＊[函数]$\longrightarrow[*\lim_{n\to *\infty}p(n)=0\longleftrightarrow(\forall\varepsilon)(\exists s)(\forall n)[\varepsilon\in *R\wedge\varepsilon>o\longrightarrow[s\in *N\wedge[n\in *N\wedge s<n\longrightarrow *|p(n)|<\varepsilon]]]]$.

在(7,11)中，绝对值“＊$||$”的确切含义是它在＊M满足以下语句，

(7,12) $(\forall x)[x\in *R\wedge o\leqslant x\longrightarrow *|x|=x]\wedge(\forall x)[x\in *R\wedge x<o\longrightarrow *|x|=-x]$.

为了把(7,2)放在M_2中进行研究，必须先弄清楚它的各个

组成部分在M_2的意义.因此必须先在M_2中引入与(7,8)到(7,12)相类似的五个关系或语句，然后进行比较.在M_2我们可以直接定义

(7,13) p是N_2到Q_2的M_2〔函数〕$\longleftrightarrow p$是$(o,\ o)$型M_2〔函数〕$\wedge(\forall n)[n\in N_2\longrightarrow(\exists y)[y\in Q_2\wedge y=p(n)]]$,

(7,14) p是N_2到Q_2的升M_2〔函数〕$\longleftrightarrow p$是N_2到Q_2的M_2〔函数〕$\wedge(\forall s)(\forall n)[s\in N_2\wedge n\in N_2\wedge s<n\longrightarrow p(s)<p(n)]$,

(7,15) q是N_2到Q_2的降M_2〔函数〕$\longleftrightarrow q$是N_2到Q_2的M_2〔函数〕$\wedge(\forall s)(\forall n)[s\in N_2\wedge n\in N_2\wedge s<n\longrightarrow p(n)<p(s)]$,

(7,16) p是N_2到Q_2的M_2〔函数〕$\longrightarrow[M_2\lim\limits_{n\to\infty_2}p(n)=0$ $\longleftrightarrow(\forall\varepsilon)(\exists s)(\forall n)[\varepsilon\in R_2\wedge\varepsilon>0\longrightarrow[s\in N_2\wedge[n\in N_2\wedge s<n\longrightarrow|p(n)|_2<\varepsilon]]]]$.

在(7,16)中，绝对值“$|\ |_2$”的确切含义是它满足以下语句

(7,17) $(\forall x)[x\in R_2\wedge x\geqslant 0\longrightarrow|x|_2=x]\wedge(\forall x)[x\in R_2\wedge x<0\longrightarrow|x|_2=-x]$.

将(7,17)和(7,12)比较，并注意到$*R=R_2$，所以成立

(7,18) $*|\ |=|\ |_2$.

即“$*|\ |$”与“$|\ |_2$”表示相同的函数.

注意，在(7,8)中p是任意变化的，故利用(6,2)得在M_2成立

(7,19) $p\in *\Gamma\longrightarrow[p$是$*N$到$*Q$的$*$〔函数〕$\longleftrightarrow p$是$(o,\ o)$型$*$〔函数〕$\wedge(\forall n)[n\in *N\longrightarrow(\exists y)[y\in *Q\wedge y=p(n)]]$.

由(6,20)知

(7,20)　　p是$(o,\ o)$型$*$〔函数〕$\longleftrightarrow p\in *\Gamma\wedge p$是$(o,\ o)$型$M_2$〔函数〕.

将(7,20)代入(7,19)，利用(2,9)变形，再注意到(7,13)，可以得到

(7,21)　　$p\in *\Gamma\longrightarrow$〔$p$是$*N$到$*Q$的$*$〔函数〕$\longleftrightarrow p$是$N_2$到$Q_2$的$M_2$〔函数〕〕.

再利用引理(6,6)可得

(7,22)　　p是$*N$到$*Q$的$*$〔函数〕$\longleftrightarrow p\in *\Gamma\wedge p$是$N_2$到$Q_2$的$M_2$〔函数〕.

由(7,9)和(7,10)，类似地可得到

(7,23)　　p是$*N$到$*Q$的升$*$〔函数〕$\longleftrightarrow p\in *\Gamma\wedge$ p是N_2到Q_2的升M_2〔函数〕.

(7,24)　　q是$*N$到$*Q$的降$*$〔函数〕$\longleftrightarrow q\in *\Gamma\wedge$ q是N_2到Q_2的降M_2〔函数〕.

最后利用(6,2)，由(7,11)得在M_2成立

(7,25)　　$p\in *\Gamma\longrightarrow$〔$p$是$*N$到$*Q$的$*$〔函数〕$\longrightarrow$ 〔$*\lim\limits_{n\to *\infty}p(n)=0\longleftrightarrow(\forall\varepsilon)(\exists s)(\forall n)$ 〔$\varepsilon\in *R\wedge\varepsilon>0\longrightarrow$〔$s\in *N\wedge$〔$n\in *N\wedge s<n$ $\longrightarrow *|p(n)|<\varepsilon$〕〕〕〕〕〕.

由(7,22)，有

(7,26)　　$p\in *\Gamma\wedge p$是$*N$到$*Q$的$*$〔函数〕$\longleftrightarrow p\in *\Gamma\wedge$ p是N_2到Q_2的M_2〔函数〕.

由(2,9)，(7,16)(7,26)和(7,25)得

(7,27)　　$p\in *\Gamma\wedge p$是N_2到Q_2的M_2〔函数〕$\longrightarrow$ 〔$*\lim\limits_{n\to *\infty}p(n)=o\longleftrightarrow M_2\lim\limits_{n\to\infty_2}p(n)=0$〕.

又利用(2,9)改写(7,27)得

(7,28)　　p是N_2到Q_2的M_2〔函到〕$\longrightarrow$〔$p\in *\Gamma\longrightarrow$

$$[{}^*\lim_{n\to {}^*\infty} p(n)=0 \longleftrightarrow M_2\lim_{n\to\infty_2} p(n)=0]]$$

注意到

(7,29) $\quad {}^*\lim_{n\to {}^*\infty} p(n)=0 \longrightarrow p\in {}^*\Gamma.$

所以成立

(7,30) $\quad {}^*\lim_{n\to {}^*\infty} p(n)=0 \longleftrightarrow p\in {}^*\Gamma\wedge {}^*\lim_{n\to {}^*\infty} p(n)=0 .$

由(2,9)，(7,30)和(7,28)得

(7,31) $\quad p$是N_2到Q_2的M_2〔函数〕$\longrightarrow[{}^*\lim_{n\to {}^*\infty} p(n)=0 \longleftrightarrow$

$p\in {}^*\Gamma\wedge M_2\lim_{n\to\infty_2} p(n)=0]$.

现在利用(6,2)，将(7,2) 在M_2写出得

(7,32) $\quad r\in {}^*\Gamma\to(7,2)$

具体写出来则是

(7,33) $\quad r\in {}^*\Gamma\to[r$是${}^*R$的实数$\longleftrightarrow(\exists p)(\exists q)[p$是${}^*N$到${}^*Q$的升*〔函数〕$\wedge q$是${}^*N$到${}^*Q$的降*〔函数〕

$\wedge {}^*\lim_{n\to {}^*\infty}(q(n)-p(n))=0$

$\wedge r=\bigcap_{n\in {}^*N}(p(n),q(n))]]$.

由(6,1)，(7,23)，(7,24)和(7,27)，知上式可以改写为

(7,34) $\quad r\in {}^*\Gamma\to[r$是${}^*R$的实数$\longleftrightarrow(\exists p)(\exists q)[p\in {}^*\Gamma\wedge q\in {}^*\Gamma\wedge p$是$N_2$到$Q_2$的升$M_2$〔函数〕$\wedge q$是$N_2$到$Q_2$的降$M_2$〔函数〕

$\wedge M_2\lim_{n\to\infty_2}(q(n)-p(n))=0$

$\wedge r=\bigcap_{n\in N_2}(p(n),q(n))]]$.

另外，由$r=\bigcap_{n\in N_2}(p(n),q(n))$可推得

$$r\in {}^*\Gamma\longleftrightarrow p\in {}^*\Gamma\wedge q\in {}^*\Gamma.$$

因此(7,34)可变为

(7,35) $r\in{}^*\Gamma\to$〔r是$^*R$的实数$\longleftrightarrow(\exists p)(\exists q)$〔$r\in{}^*\Gamma\wedge$
p是N_2到Q_2的升M_2〔函数〕$\wedge q$是N_2到Q_2的降M_2〔函数〕$\wedge M_2\lim\limits_{n\to\infty_2}(q(n)-p(n))=O\wedge r=\bigcap\limits_{n\in N_2}(p(n),q(n))$〕〕.

利用(2,21)将(7,35)后面那个$r\in{}^*\Gamma$从量词后面提到量词前面，并注意到

(7,36) r是$^*R$的实数$\to r\in{}^*\Gamma$.

由(7,35)可得

(7,37) r是$^*R$的实数$\longleftrightarrow r\in{}^*\Gamma\wedge(\exists p)(\exists q)$
〔p是N_2到Q_2的升M_2〔函数〕$\wedge q$是N_2到Q_2的降M_2〔函数〕
$\wedge M_2\lim\limits_{n\to\infty_2}(q(n)-p(n))=o\wedge r=\bigcap\limits_{n\in N_2}(p(n),q(n))$〕.

如果在M_2引入定义

(7,38) r是M_2的预备数$\longleftrightarrow(\exists p)(\exists q)$〔$p$是$N_2$到$Q_2$的升$M_2$〔函数〕$\wedge q$是$N_2$到$Q_2$的降$M_2$〔函数〕$\wedge M_2\lim\limits_{n\to\infty_2}(q(n)-p(n))=o\wedge r=\bigcap\limits_{n\in N_2}(p(n),q(n))$〕.

那么(7,37)可以表为

(7,39) r是$^*R$的实数$\longleftrightarrow r\in{}^*\Gamma\wedge r$是$M_2$的预备数.

这样看来，$^*R$只是M_2的预备数的一个子集。另外，(7,37)还可以改写为

(7,40) r是$^*R$的实数$\longleftrightarrow$
$(\exists p)(\exists q)$〔$p\in{}^*\Gamma\wedge q\in{}^*\Gamma\vee p$是$N_2$到$Q_2$的升$M_2$〔函数〕$\wedge q$是$N_2$到$Q_2$的降$M_2$〔函数〕

$\wedge M_2 \lim_{n\to\infty_2}(q(n)-p(n)) = o \wedge r = \bigcap_{n\in N_2}(p(n),$

$q(n))$〕。

可以把(7,40)看成第二相实数在M_2的定义。

为了方便和明确，记

(7,41) $R_1 = \{x \mid (\exists t)[t\in R \wedge x = *t]\}$

$Q_1 = \{x \mid (\exists t)[t\in Q \wedge x = *t]\}$

$N_1 = \{x \mid (\exists t)[t\in N \wedge x = *t]\}$。

不难看出，N_1，Q_1和R_1分别与N，Q和R代数同构．在比较放松的情况下，我们认为它们分别是相同的．R_1，N_1和Q_1都是$*R$的外子集（即不属于$*\Gamma$的$*R$的子集）．

现在举两个例子如下．

【例1】 在M中，按照我们上面的定义法，数O可以定义为

(7,42) $$O = \bigcap_{n\in N}\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right).$$

通过$*$——映射，在$*M$中，数$*O$可以定义为

(7,43) $$*O = \bigcap_{n\in *N}\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right).$$

【例2】 在M_2中，设a和b是N_2到Q_2的M_2〔函数〕，具体定义为

(7,44) $$a(n) = \begin{cases} -\frac{1}{n}, & n\in N_1 \\ -\frac{1}{n^2}, & n\in N_2\backslash N_1 \end{cases}$$

(7,45) $$b(n) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n\in N_1 \\ \frac{1}{n^2}, & n\in N_2\backslash N_1. \end{cases}$$

当我们把N_1看作是$*R$的子集合，那么N_1有上界但没有最小上界。因此，$N_1 \notin *\Gamma$，所以a和b也不属于$*\Gamma$。这时，令

$$(7,46) \qquad h=\bigcap_{n\in N_2}(a(n),b(n)).$$

那么h是M_2的预备数，但它不是$*R$的实数。

下面我们研究第一相实数与第二相实数的关系。设在M有

$$(7,47) \qquad g\in R\wedge g=\bigcap_{n\in N}(\alpha(n),\beta(n)),$$

其中α和β是N到Q的函数，满足（7，1）中的要求。通过$*$——映射，在$*M$成立

$$(7,48) \qquad *g\in *R\wedge *g=\bigcap_{n\in *N}(*\alpha(n),*\beta(n)).$$

注意到（7，41）我们有

$$(7,49) \qquad *g\in R_1.$$

有趣的是每个这样的g还对应着M_2的如下的一个集合

$$(7,50) \qquad \mathrm{mon}(*g)=\bigcap_{n\in N_1}(*\alpha(n),*\beta(n))),$$

我们称$\mathrm{mon}(*g)$为包含标准数$*g$的单子。由于$N_1\notin *\Gamma$，所以$\mathrm{mon}(*g)$也不属于$*\Gamma$。由于我们把Γ_2中不属于$*\Gamma$的对象称之为外的，所以N_1和$\mathrm{mon}(*g)$都是$*R$中的外集合。

如果在M_2中令

$$(7,51) \qquad R_{\mathrm{mon}}=\{x\mid(\exists y)[y\in R\wedge x=\mathrm{mon}(*y)]\},$$ 即

R_{mon}是与每个R中的数y所对应的单子的集合。如果适当地引进代数运算，则R_{mon}也会与R代数同构。

这样，R的每个数y，即对应一个$*y\in R_1$，又对应一个$\mathrm{mon}(*y)\in R_{\mathrm{mon}}$，而且成立

$$(7,52) \qquad *y\in \mathrm{mon}(*y).$$

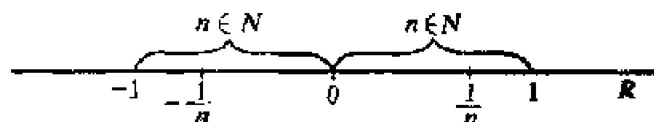
特别，如上所述，R中的O以（7，42）表示，R_1的$*O$以（7，43）表示。又在R_{mon}中，它所对应的单子为

(7,53)　　$\text{mon}(*O)=\bigcap_{n\in N_1}\left(-\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right)$。

显然成立 $*O\in\text{mon}(*O)$。

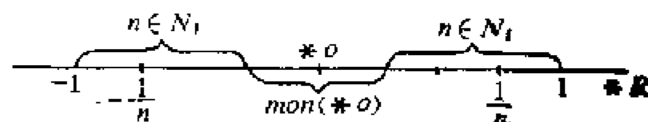
为了加强直观，我们作点几何描述如下。

1.R中的$O=\bigcap_{n\in N}\left(-\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right)$，其几何示意图如下图(7,1)。



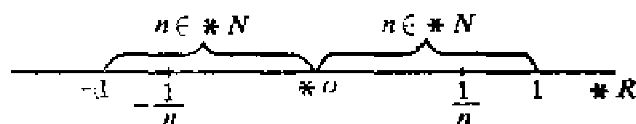
图（7，1）

2.在第二相实数线 $*R$上，零单子 $\text{mon}(*o)=\bigcap_{n\in N_1}\left(-\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right)$的示意图(7,2)如下。



图（7，2）

3.在 $*R$上，$*o=\bigcap_{n\in *N}\left(-\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right)$的示意图（7,3）如下。



图（7，3）

注意到N_1是$*N$的真子集，所以mon（$*o$）除了$*o$之外还含有 $*R$的其它的无限小。

在本节最后，我们正式叙述一下 $*R$中关于无限小，有限数和无限大的定义

(7,54)　　x是无限小$\longleftrightarrow$

$x \in {}^*R \wedge x \in \mathrm{mon}({}^*o)$

(7,55) x是正无限小$\longleftrightarrow$

x是无限小$\wedge {}^*o < x$

(7,56) x是负无限小$\longleftrightarrow$

x是无限小$\wedge x < {}^*o$

(7,57) x是有限数$\longleftrightarrow x \in {}^*R \wedge (\exists y)\,[y \in R_1 \wedge |x| < |y|]$

(7,58) x是正有限数$\longleftrightarrow$

x是有限数$\wedge {}^*o < x$

(7,59) x是负有限数$\longleftrightarrow$

x是有限数$\wedge x < {}^*o$

(7,60) x是无限大$\longleftrightarrow x \in {}^*R \wedge (\forall y)\,[y \in R_1 \rightarrow |y| < |x|]$

(7,61) x是正无限大$\longleftrightarrow$

x是无限大$\wedge {}^*o < x$

(7,62) x是负无限大$\longleftrightarrow$

x是无限大$\wedge x < {}^*o$

以上定义都是M_2的。由此可见，无限大和无限小的概念是相对的，是${}^*R$的数与R_1的数相比较而产生的.

在比较放松的情况下，我们不必从符号上区分${}^*o$和o，即把${}^*o$写成o.对其它具体的数字，如1，2，3，……等，也可类似表示.

${}^*R$的下述子集都是外的：全体无限小量的集合，全体无限大量的集合，全体有限数的集合和每个标准数所对应的单子.它们都不满足完备地公理.它们都不是${}^*\Gamma$中的对象.

§8 数学归纳法

在标准分析M中，数学归纳法占有重要地位.因此，在M_2

中必须着重研究一下数学归纳法的状况。

与Skolem〔48〕一致，我们把自然数集N的首元素取为1。

设在M中φ是定义在自然数集N上的任意命题序列，那么在M中成立

(8,1) 关于命题序列φ的归纳法$\longleftrightarrow$〔$\varphi(1)\wedge(\forall l)$〔$l\in N\wedge\varphi(l)\to\varphi(l+1)$〕$\to(\forall n)$〔$n\in N\to\varphi(n)$〕〕。

对(8,1)利用*——映射，在*M成立以下归纳法。

设在*M中φ是定义在第二相自然数集*N的任意命题*〔序列〕，此时在*M中成立

(8,2) 关于命题*〔序列〕的*〔归纳法〕$\longleftrightarrow$〔$\varphi(1)\wedge(\forall l)$〔$l\in{}^*N\wedge\varphi(l)\to\varphi(l+1)$〕$\to(\forall n)$〔$n\in{}^*N\to\varphi(n)$〕〕。

在M_2中设φ是定义在第二相自然数集N_2上的任意命题M_2〔序列〕，此时，在M_2中可以仿照(8,1)，定义以下语句

(8,3) 关于命题M_2〔序列〕φ的M_2〔归纳法〕$\longleftrightarrow$〔$\varphi(1)\wedge(\forall l)$〔$l\in N_2\wedge\varphi(l)\to\varphi(l+1)$〕$\to(\forall n)$〔$n\in N_2\to\varphi(n)$〕〕。

但请注意，关于命题M_2〔序列〕φ的M_2〔归纳法〕并不总是正确的，下面将举一个例子。在举例之前，我们先说明一个等价关系。

利用(6,2)，从(8,2)可推得

(8,4) $\varphi\in{}^*\Gamma\to$关于命题M_2〔序列〕φ的M_2〔归纳法〕。

用普通的语言来说，只要$\varphi\in{}^*\Gamma$，则关于命题M_2〔序列〕的M_2〔归纳法〕是成立的。而且(8,4)与(8,2)是等价的。

现在举一个反例，说明当$\varphi\notin{}^*\Gamma$时，关于命题M_2〔序列〕的M_2〔归纳法〕一般是不成立的。

【例1】 设f是N_2到Q_2的M_2〔函数〕，具体定义为

(8,5) $$f(n)=\begin{cases}1, & n\in N_1\\ 0, & n\in N_2\backslash N_1.\end{cases}$$

又令$g(n)$是定义在N_2上的命题，具体定义为

(8,6) $$g(n)\longleftrightarrow [f(n)=1], n\in N_2.$$

首先不难看出$g(1)$为真，这是因为$f(1)=1$是成立的.

其次我们要证明

(8,7) $$(\forall l)[l\in N_2\wedge g(l)\longrightarrow g(l+1)].$$

由(2,9)不难看出，(8,7)等价于

(8,8) $$(\forall l)[l\in N_2\longrightarrow [g(l)\longrightarrow g(l+1)]]\longleftrightarrow(\forall l)[l\in N_2\longrightarrow [\neg g(l)\vee g(l+1)]].$$

由于$l\in N_2$等价于$l\in N_1\vee l\in N_2\backslash N_1$，我们可以分两种情况讨论.

当$l\in N_1$时，由于$f(l+1)=1$，故$g(l+1)$成立，因此$\neg g(l)\vee g(l+1)$为真.

当$l\in N_2/N_1$时，由于$f(l)=0$，故$f(l)\neq 1$，因而$\neg g(l)$为真，因此，$\neg g(l)\vee g(l+1)$为真.

这样我们证明了

(8,9) $$(\forall l)[l\in N_2\longrightarrow [\neg g(l)\vee g(l+1)]].$$

由等价关系(8,8)知(8,7)成立.因此命题$g(l)$完全满足(8,3)关于命题M_2〔序列〕g的M_2〔归纳法〕的前提.以下将说明(8,3)的结论不成立，即证明

(8,10) $$(\forall n)[n\in N_2\longrightarrow g(n)]$$

不成立.事实上，当$n\in N_2/N_1$，由于$f(n)=0$，故$f(n)\neq 1$，因而$g(n)$不成立.因此(8,10)不成立.也就是，我们证明了(8,3)的负命题

(8,11) $$(\exists\varphi)[\varphi(1)\wedge(\forall l)[l\in N_2\wedge\varphi(l)\longrightarrow\varphi$$

$(l+1)]\wedge(\exists n)[n\in N_2\wedge\neg\varphi(n)]]$.

但是我们承认标准有限归纳法对任何数学系统成立，因此在M_2也成立．它的确切表示式如下．在M_2设φ是定义在N_1上的命题N_1〔序列〕，此时M_2的标准有限归纳法可表为

(8,12)　关于命题N_1〔序列〕φ的N_1〔归纳法〕$\longleftrightarrow[\varphi(1)\wedge(\forall l)[l\in N_1\wedge\varphi(l)\longrightarrow\varphi(l+1)]\longrightarrow(\forall n)[n\in N_1\longrightarrow\varphi(n)]]$.

我们利用这个归纳法，在M_2中证明以下命题

(8,13)　$(\forall r)$〔r是有限数$\longrightarrow(\exists x)[x\in R\wedge r\in\mathrm{mon}(*x)]]$.

用通常的话来说就是，对$*R$中的任意一个有限数r，都存在一个标准数$x\in R$，使得r属于$*x$所在的单子．

证明：因为r是有限的，所以存在$i\in N_1$，使得：$-i<r<i$。

如果r是标准有理数，则成立$r\in\mathrm{mon}(r)$，所以(8,13)已获得证明．若r不是标准有理数，我们如下进行证明．令$a_1=-i$，$b_1=i$，故成立$a_1<r<b_1$，a_1，b_1是标准有理数．因此成立以下语句

(8,14)　$a_1\in Q\wedge b_1\in Q\wedge b_1-a_1=4i/2\wedge a_1<r<b_1$.

现在我们作M_2的命题N_1〔序列〕如下

(8,15)　$\varphi(s)\longleftrightarrow a_s\in Q\wedge b_s\in Q\wedge b_s-a_s=4i/2^s\wedge a_s<r<b_s$.

由(8,14)可知：$\varphi(1)$为真．现在我们定义

(8,16)　$m_s=\dfrac{a_s+b_s}{2}$.

故$m_s\in Q$且$m_s\neq r$．若$m_s<r$，我们规定

(8,17)　$a_{s+1}=m_s$和$b_{s+1}=b_s$；

若$r<m_s$，我们规定

(8,18) $a_{s+1}=a_s$和$b_{s+1}=m_s$.

因此，从$\varphi(s)$推得$\varphi(s+1)$为真.这样，由(8, 12)可推得

(8,19) $(\forall n)\ [n\in N_t\longrightarrow\varphi(n)]$.

现在令

(8,20) $\alpha_n=a_n-\frac{1}{n},\ \beta_n=b_n+\frac{1}{n}$.

其中$n\in N$，则α_n是N到Q的升函数，β_n是N到Q的降函数，且

$$\lim_{n\to\infty}(\beta_n-\alpha_n)=0.$$

现在定义

(8,21) $h=\bigcap_{n\in N}(\alpha_n,\beta_n)$.

则$h\in R$，且$r\in\text{mon}(*h)$.也就是证明了

(8,22) $(\exists x)\ [x\in R\wedge r\in\text{mon}(*x)]$.

(8,13)证完.

§9 区间和内函数

在标准分析M中，区间是函数的最常见的定义域。现在考察一下，在$*M$和M_2中区间的概念又是怎么回事。在M中，标准实数区间的定义如下。设x，p和q是取值于R内的变量，我们有

(9,1)
$$x\in[p,q]\longleftrightarrow p\leqslant x\leqslant q$$
$$x\in(p,q]\longleftrightarrow p<x\leqslant q$$
$$x\in[p,q)\longleftrightarrow p\leqslant x<q$$
$$x\in(p,q)\longleftrightarrow p<x<q$$
$$x\in(-\infty,p)\longleftrightarrow x<p$$

$$x \in (-\infty, p] \longleftrightarrow x \leqslant p$$

$$x \in (-\infty, +\infty) \longleftrightarrow x \in R$$

$$x \in (p, +\infty) \longleftrightarrow p < x$$

$$x \in [p, +\infty) \longleftrightarrow p \leqslant x.$$

通过$*$——映射，在$*M$中区间的定义如下。设x, p和q是取值于$*R$的变量，我们有

(9,2)
$$x \in *[p,q] \longleftrightarrow p \leqslant x \leqslant q$$

$$x \in *(p,q] \longleftrightarrow p < x \leqslant q$$

$$x \in *[p,q) \longleftrightarrow p \leqslant x < q$$

$$x \in *(p,q) \longleftrightarrow p < x < q$$

$$x \in *(-\infty, p) \longleftrightarrow x < p$$

$$x \in *(-\infty, p] \longleftrightarrow x \leqslant p$$

$$x \in *(-\infty, +\infty) \longleftrightarrow x \in *R$$

$$x \in *(p, +\infty) \longleftrightarrow p < x$$

$$x \in *[p, +\infty) \longleftrightarrow p \leqslant x.$$

在M_2中，仿照(9,1)，可如下定义区间。设x，p和q是取值于R_2的变量，我们有

(9,3)
$$x \in [p,q]_2 \longleftrightarrow p \leqslant x \leqslant q$$

$$x \in (p,q]_2 \longleftrightarrow p < x \leqslant q$$

$$x \in [p,q)_2 \longleftrightarrow p \leqslant x < q$$

$$x \in (p,q)_2 \longleftrightarrow p < x < q$$

$$x \in (-\infty_2, p) \longleftrightarrow x < p$$

$$x \in (-\infty_2, q] \longleftrightarrow x \leqslant q$$

$$x \in (-\infty_2, +\infty_2) \longleftrightarrow x \in R_2$$

$$x \in (p, +\infty_2) \longleftrightarrow p < x$$

$$x \in [p, +\infty_2) \longleftrightarrow p \leqslant x.$$

比较(9,2)和(9,3)，可以得到

(9,4)
$$x \in *[p,q] \longleftrightarrow x \in [p,q]_2$$

$x \in *(p,q] \longleftrightarrow x \in (p,q]_2$

$x \in *[p,q) \longleftrightarrow x \in [p,q)_2$

$x \in *(p,q) \longleftrightarrow x \in (p,q)_2$

$x \in *(-\infty,p) \longleftrightarrow x \in (-\infty_2,p)$

$x \in *(-\infty,p] \longleftrightarrow x \in (-\infty_2,p]$

$x \in *(-\infty,+\infty) \longleftrightarrow x \in (-\infty_2,+\infty_2)$

$x \in *(p,+\infty) \longleftrightarrow x \in (p,+\infty_2)$

$x \in *[p,+\infty) \longleftrightarrow x \in [p,+\infty_2)$.

因此，在M_2中，九种区间，$[p,q]_2$，$(p,q]_2$，$[p,q)_2$，$(p,q)_2$，$(-\infty_2,p)$，$(-\infty_2,p]$，$(-\infty_2,+\infty_2)$，$(p,+\infty_2)$和$[p,+\infty_2)$都是内集合。在不引起混乱时，我们把$[p,q]_2$，$(p,q]_2$，$[p,q)_2$和$(p,q)_2$简记为$[p,q]$，$(p,q]$，$[p,q)$和(p,q)。

以下讨论函数的概念。设变量p_1，p_2和p分别是(τ_1)型，(τ_2)型和$(\tau_1,\ \tau_2)$型的。

在M中有以下定义

(9,5) p是p_1到p_2的函数$\longleftrightarrow p$是$(\tau_1,\ \tau_2)$型函数$\wedge(\forall x)[x\in p_1\longrightarrow(\exists y)[y\in p_2\wedge y=p(x)]]$.

由公设（5，2），在$*M$有

(9,6) p是p_1到p_2的$*$[函数]$\longleftrightarrow p$是$(\tau_1,\ \tau_2)$型$*$[函数]$\wedge(\forall x)[x\in p_1\longrightarrow(\exists y)[y\in p_2\wedge y=p(x)]]$.

仿照(9,5)，在M_2可直接定义

(9,7) p是p_1到p_2的M_2[函数]$\longleftrightarrow p$是$(\tau_1,\ \tau_2)$型M_2[函数]$\wedge(\forall x)[x\in p_1\longrightarrow(\exists y)[y\in p_2\wedge y=p(x)]]$.

由(6,2)，(9,6)和(6,23)得到

(9,8) $p\in *\Gamma\wedge p_1\in *\Gamma\wedge p_2\in *\Gamma\longrightarrow[p$是$p_1$到$p_2$的$*$[函数]$\longleftrightarrow p$是$(\tau_1,\ \tau_2)$型$M_2$[函数]$\wedge$

$(\forall x)[x\in p_1\longrightarrow(\exists y)[y\in p_2\wedge y=p(x)]]$。

将 (9,7) 代入 (9,8) 得

(9,9) $p\in {}^*\Gamma\wedge p_1\in {}^*\Gamma\wedge p_2\in {}^*\Gamma\longrightarrow[p$是$p_1$到$p_2$的$*$〔函数〕$\longleftrightarrow p$是$p_1$到$p_2$的$M_2$〔函数〕$]$。

注意到

(9,10) p是p_1到p_2的$*$〔函数〕$\longrightarrow p\in {}^*\Gamma\wedge p_1\in {}^*\Gamma\wedge p_2\in {}^*\Gamma$,

由引理(6,6)得

(9,11) p是p_1到p_2的$*$〔函数〕$\longleftrightarrow p\in {}^*\Gamma\wedge p_1\in {}^*\Gamma\wedge p_2\in {}^*\Gamma\wedge p$是$p_1$到$p_2$的$M_2$〔函数〕。

以下举几个简单的例子。在举例之前，我们先引进几个符号：以$p\in \mathrm{ft}(p_1,p_2)$指称“$p$是$p_1$到$p_2$的函数”，以$p\in {}^*\mathrm{ft}(p_1,p_2)$指称“$p$是$p_1$到$p_2$的$*$〔函数〕”，以$p\in ft_2(p_1,p_2)$指称“$p$是$p_1$到$p_2$的$M_2$〔函数〕。那么，(9,11)可以改写为

(9,12) $p\in {}^*\mathrm{ft}(p_1,p_2)\longleftrightarrow p\in {}^*\Gamma\wedge p_1\in {}^*\Gamma\wedge p_2\in {}^*\Gamma\wedge p\in \mathrm{ft}_2(p_1,p_2)$。

读者可以看到，象(9,12)这种完全形式化的写法更加严谨。不过形式符号引进得太多，由于记忆困难，以致造成不好理解，所以在大多数情形下，作者仍然采用通常的数学语言来表达。

【例 1】 若f是R到“R到R的函数”的函数，即$f\in \mathrm{ft}(R,\mathrm{ft}(R,R))$。那么，当$p\in R$，我们有$f(p)\in \mathrm{ft}(R,R)$。进一步，具体定义为

(9,13) $f(p)(x)=p,\ \forall x\in R$。

这就是说，$f(p)$是取值为p的常值函数。

然后由公设（5，2），通过$*$一一映射，在$^*M$我们有：

$^*f$是$^*R$到“$^*R$到$^*R$的$*$〔函数〕”的$*$〔函数〕，即$^*f\in {}^*\mathrm{ft}({}^*R,{}^*\mathrm{ft}({}^*R,{}^*R))$。

那么当$p\in {}^*R$, ${}^*f(p)\in {}^*\mathrm{ft}({}^*R, {}^*R))$.

进一步有

(9,14) $\quad {}^*f(p)(x)=p$, $\forall x\in {}^*R$.这就是说，${}^*f(p)$ 是取值为p的常值函数

注意到$p\in {}^*R$是任意的，故在M_2中取值为${}^*R$的任意实数的常值函数是内函数。（即为${}^*\Gamma$的成员）.

【例2】 如果将(9,13)改为

(9,15) $\quad f(p)(x)=px$, $\forall x\in R$.这就是说，$f(p)$ 是斜率为p的线性齐次函数.

由公设（5,2），通过* ——映射，在${}^*M$中成立

(9,16) $\quad {}^*f(p)(x)=px$, $\forall x\in {}^*R$.这就是说，${}^*f(p)$ 是斜率为p的线性齐次函数.

由于$p\in {}^*R$是任意的，故在M_2中斜率为任意p的线性齐次函数是内函数（即属于${}^*\Gamma$）.

【例3】 我们以$R\times R$代表R与R的笛卡儿乘积.取$f\in \mathrm{ft}(R\times R, R)$，具体定义为

(9,17) $\quad f(x,y)=x+y$, $\forall x$, $\forall y\in R$.由公设（5,2），通过* ——映射，在${}^*M$有${}^*f\in {}^*\mathrm{ft}({}^*R\times {}^*R, {}^*R)$，具体定义为

(9,18) $\quad {}^*f(x,y)=x+y$, $\forall x$, $\forall y\in {}^*R$. 故在M_2中，加法函数${}^*f$是标准函数.

【例4】 若(9,14)换为

(9,19) $\quad f(x,y)=xy$, $\forall x$, $\forall y\in {}^*R$. 由公设(5,2)，通过* ——映射，在${}^*M$有

(9,20) $\quad {}^*f(x,y)=xy$, $\forall x$, $\forall y\in {}^*R$.故在M_2中，乘法函数${}^*f$是标准的.

进一步的例子请参考第五章.我们不可能把所有的内函数（或其它内对象）都给出来，但是我们应当把最重要的内函数

——如基本初等函数给出来，这将在第五章中讨论.

§10 （有限）和，乘积以及二项式定理

我们知道，有限和，有限乘积以及二项式定理是标准分析极为重要的概念.没有有限和，怎么定义积分呢？因此，我们必须在M，$*M$以及M_2中研究这三个内容.

我们从有限和开始，在M中成立以下关系

$$
\begin{aligned}
(10,1)\qquad & q\in \mathrm{ft}(N,R)\longrightarrow(\exists s)[s\in \mathrm{ft}(N,R)\wedge\\
& s(1)=q(1)\wedge(\forall l)[l\in N\longrightarrow\\
& s(l+1)=s(l)+q(l+1)]\wedge(\forall t)[t\in \mathrm{ft}(N,R)\wedge\\
& t(1)=q(1)\wedge(\forall l)[l\in N\longrightarrow\\
& t(l+1)=t(l)+q(l+1)]\longrightarrow t=s]].
\end{aligned}
$$

用普通语言来表达，（10，1）的意义是：对任意的$q\in \mathrm{ft}(N,R)$，唯一存在$s\in \mathrm{ft}(N,R)$使得$s(1)=q(1)$和$s(l+1)=s(l)+q(l+1)$对任意$l\in N$成立.但是用普通语言表达不好按公设（5,2)进行$*$一映射.对于每个象（10,1）这样的形式化的句子，不必每次都把它的普通语言表示写出来.

在M中关于有限和“Σ”可以如下定义

$$
\begin{aligned}
(10,2)\qquad & \Sigma\in \mathrm{ft}(\mathrm{ft}(N,R),\ \mathrm{ft}(N,R))\\
& \wedge(\forall q)[q\in \mathrm{ft}(N,R)\longrightarrow\\
& \Sigma(q)(1)=q(1)\wedge(\forall l)[l\in N\longrightarrow\\
& \Sigma(q)(l+1)=\Sigma(q)(l)+q(l+1)]]
\end{aligned}
$$

注意：由于$\Sigma\in \mathrm{ft}(\mathrm{ft}(N,R),\ \mathrm{ft}(N,R))$，所以$\Sigma(q)\in \mathrm{ft}(N,R)$，即$\Sigma(q)$是$N$到$R$的函数，而$\Sigma(q)(l)$表示函数$\Sigma(q)$在$l$这一点上的函数值.在习惯上，我们记作

$$(10,3)\qquad \Sigma(q)(n)=\sum_{i=1}^{n}q(i).$$

由公设（5，2），通过$*$——映射，（10，1）在$*M$

变为

$$(10,4)\qquad q\in {}^*\mathrm{ft}({}^*N,\ {}^*R)\longrightarrow(\exists s)[s\in {}^*\mathrm{ft}({}^*N,\ {}^*R)\wedge s(1)=q(1)\wedge(\forall l)[l\in {}^*N\longrightarrow s(l+1)=s(l)+q(l+1)]\wedge(\forall t)[t\in {}^*\mathrm{ft}({}^*N,{}^*R)\wedge t(1)=q(1)\wedge(\forall l)[l\in {}^*N\longrightarrow t(l+1)=t(l)+q(l+1)]\longrightarrow t=s]],$$

(10,2)在 $^*M$ 变为

$$(10,5)\qquad {}^*\Sigma\in {}^*\mathrm{ft}({}^*\mathrm{ft}({}^*N,{}^*R),\ {}^*\mathrm{ft}({}^*N,{}^*R))\wedge(\forall q)[q\in {}^*\mathrm{ft}({}^*N,{}^*R)\longrightarrow {}^*\Sigma(q)(1)=q(1)\wedge(\forall l)[l\in {}^*N\longrightarrow {}^*\Sigma(q)(l+1)={}^*\Sigma(q)(l)+q(l+1)]],$$

(10,3)在 $^*M$ 变为

$$(10,6)\qquad {}^*\Sigma(q)(n)={}^*\sum_{i=1}^{n}q(i).$$

由以上讨论知在 $^*M$ 中对每个 $q\in {}^*\mathrm{ft}({}^*N,{}^*R)$ 可以定义它的有限和，即 $^*\Sigma$ 是有意义的。现在问，在 M_2 中，对每个 $q\in \mathrm{ft}_2(N_2,R_2)$ 是否能定义它的有限和呢？我们自然要求：①在 M_2 所定义的有限和与 M 的有限和具有相同的性质，②在 M_2 所定义的有限和，当局限在 $^*M$ 上时与 $^*M$ 的有限和的含义相同。我们说，要满足以上两个要求，在 M_2 一般地定义有限和是不可能的。

为此，我们先介绍 M 中有限和的重要性质，实际上是引入等价的有限和的另一种定义方法。为此，我们引入两个辅助概念。

我们以 $\mathrm{pre}N$ 表示自然数集 N 的前段子集，确切含义是

$$(10,7)\qquad p\in \mathrm{pre}N\longleftrightarrow p\subseteq N\wedge(\forall x)(\forall y)[x\in p\wedge y\in N$$

$\setminus p \longrightarrow x < y]$.

我们以prem$N$表示自然数集N的前中段子集，具体含义是

(10,8) $x \in \mathrm{prem}N \longleftrightarrow x \in \mathrm{pre}N \vee (\exists y)[y \in \mathrm{pre}N \wedge x \sqsubset y \wedge (y \setminus x) \in \mathrm{pre}N]$.

这样，在M成立以下关系

(10,9) $q \in \mathrm{ft}(N, R) \longrightarrow (\exists s)[s \in \mathrm{ft}(\mathrm{prem}N, R) \wedge (\forall x)[x \in N \longrightarrow s(\{x\}) = q(x)] \wedge (\forall p)(\forall t)[p \in \mathrm{pre}N \wedge p \cup t \in \mathrm{pre}N \wedge p \cap t = \phi \longrightarrow s(p \cup t) = s(p) + s(t)] \wedge (\forall s_1)[s_1 \in \mathrm{ft}(\mathrm{prem}N, R) \wedge (\forall x)[x \in N \longrightarrow s_1(\{x\}) = q(x)] \wedge (\forall p)(\forall t)[p \in \mathrm{pre}N \wedge p \cup t \in \mathrm{pre}N \wedge p \cap t = \phi \longrightarrow s_1(p \cup t) = s_1(p) + s_1(t)] \longrightarrow s_1 = s]]$.

这个关系的意思是：对任意$q \in \mathrm{ft}(N, R)$，唯一存在$s \in \mathrm{ft}(\mathrm{prem}N, R)$使得对任何$x \in N$成立$s(\{x\}) = q(x)$而且对任何$p \in \mathrm{pre}N$和任何$t$满足$p \cup t \in \mathrm{pre}N$和$p \cap t = \phi$成立$s(p \cup t) = s(p) + s(t)$.

实际上，如果以$|1, n|$表示自然数片断，其中$n \in N$，具体表示为

(10,10) $x \in |1, n| \longleftrightarrow x \in N \wedge 1 \leqslant x \leqslant n$.

那么$s(|1, n|)$即为和$\sum_{i=1}^{n} q(i)$. 因此可以在M引进有限和的第二种定义

(10,11) $\dot{\Sigma} \in \mathrm{ft}(\mathrm{ft}(N, R), \mathrm{ft}(\mathrm{prem}N, R)) \wedge (\forall q)[q \in \mathrm{ft}(N, R) \longrightarrow (\forall x)[x \in N \longrightarrow \dot{\Sigma}(q)(\{x\}) = q(x)] \wedge (\forall p)(\forall t)[p \in \mathrm{pre}N \wedge p \cup t \in \mathrm{pre}N \wedge p \cap t = \phi \longrightarrow \dot{\Sigma}(q)(p \cup t) = \dot{\Sigma}(q)(p) + \Sigma(q)(t)]]$.

于是成立

(10,12)· $\dot{\Sigma}(q)\ (|1,n|) = \sum_{i=1}^{n} q(n) = \Sigma(q)\ (n).$

并且不难看出在M成立以下公式

(10,13) $t \in \mathrm{prem} N \wedge (\forall x)[x \in t \longrightarrow q(x) = o]$

$\longrightarrow \dot{\Sigma}(q)\ (t) = o.$

(10,14) $t \in \mathrm{prem} N \wedge (\forall x)[x \in t \longrightarrow q_1(x) \geqslant q_2(x)]$

$\longrightarrow \dot{\Sigma}(q_1)\ (t) \geqslant \dot{\Sigma}(q_2)\ (t).$

(10,15) $t \in \mathrm{prem} N \wedge (\forall x)[x \in t \longrightarrow q_1(x) = q_2(x)]$

$\longrightarrow \dot{\Sigma}(q_1)\ (t) = \dot{\Sigma}(q_2)\ (t).$

现在由公设(5,2)，通过 * 一映射，把(10,7) 至(10,14)逐步变成 * M的关系。

我们以 * pre * N表示 * N的前段子集，确切含义是

(10,16) $p \in {}^*\mathrm{pre}\, {}^*N \longleftrightarrow p \sqsubset {}^*N \wedge (\forall x)(\forall y)$

$[x \in p \wedge y \in {}^*N \backslash p \longrightarrow x < y].$

我们以 * prem * N表示 * N的前中段子集，确切含义是

(10,17) $x \in {}^*\mathrm{prem}\, {}^*N \longleftrightarrow x \in {}^*\mathrm{pre}\, {}^*N \vee (\exists y)$

$[y \in {}^*\mathrm{pre}\, {}^*N \wedge x \sqsubset y \wedge y \backslash x \in {}^*\mathrm{pre}\, {}^*N].$

这样，在 * M成立以下关系

(10,18) $q \in {}^*\mathrm{ft}({}^*N, {}^*R) \longrightarrow (\exists s)[s \in {}^*\mathrm{ft}$

$({}^*\mathrm{prem}\, {}^*N, {}^*R) \wedge (\forall x)[x \in {}^*N \longrightarrow$

$s(\{x\}) = q(x)] \wedge (\forall p)(\forall t)[p \in {}^*\mathrm{pre}\, {}^*$

$N \wedge p \sqcup t \in {}^*\mathrm{pre}\, {}^*N \wedge p \sqcap t = \phi \longrightarrow$

$s(p \sqcup t) = s(p) + s(t)] \wedge (\forall s_1)[s_1 \in {}^*\mathrm{ft}$

$({}^*\mathrm{prem}\, {}^*N, {}^*R) \wedge (\forall x)[x \in {}^*N \longrightarrow$

$s_1(\{x\}) = q(x)] \wedge (\forall p)(\forall t)[p \in {}^*\mathrm{pre}\, {}^*$

$N \wedge p \sqcup t \in {}^*\mathrm{pre}\, {}^*N \wedge p \sqcap t = \phi \longrightarrow$

$s_1(p\sqcup t)=s_1(p)+s_1(t)]\longrightarrow s_1=s]]$。

由(10,11)得到在 $*M$ 关于有限和的第二种定义为

$$(10,19)\quad *\dot{\Sigma}\in *\mathrm{ft}(*\mathrm{ft}(*N,*R),*\mathrm{ft}(*\mathrm{prem}*N,*R))\wedge(\forall q)[q\in *\mathrm{ft}(*N,*R)\longrightarrow(\forall x)[x\in *N\longrightarrow *\dot{\Sigma}(q)(\{x\})=q(x)]\wedge(\forall p)(\forall t)[p\in *\mathrm{pre}*N\wedge p\sqcup t\in *\mathrm{pre}*N\wedge p\sqcap t=\phi\longrightarrow *\dot{\Sigma}(q)(p\sqcup t)=*\dot{\Sigma}(q)(p)+*\dot{\Sigma}(q)(t)]]。$$

由(10,12)知在 $*M$ 成立

$$(10,20)\quad *\dot{\Sigma}(q)(*\{1,n\})=*\sum_{i=1}^{n}q(n)=*\Sigma(q)(n),$$

其中 $n\in *N$，而且成立

$$(10,21)\quad x\in *\{1,n\}\longleftrightarrow x\in *N\wedge 1\leqslant x\leqslant n.$$

最后由公设(5,2)，通过 $*$——映射将(10,13)，(10,14)和(10,15)变到 $*M$，我们有

$$(10,22)\quad t\in *\mathrm{prem}*N\wedge(\forall x)[x\in t\longrightarrow q(x)=o]\longrightarrow *\dot{\Sigma}(q)(t)=0,$$

$$(10,23)\quad t\in *\mathrm{prem}*N\wedge(\forall x)[x\in t\longrightarrow q_1(x)\geqslant q_2(x)]\longrightarrow *\dot{\Sigma}(q_1)(t)\geqslant *\Sigma(q_2)(t),$$

$$(10,24)\quad t\in *\mathrm{prem}*N\wedge(\forall x)[x\in t\longrightarrow q_1(x)=q_2(x)]\longrightarrow *\dot{\Sigma}(q_1)(t)=*\dot{\Sigma}(q_2)(t).$$

现在我们设在 M_2 可以定义有限和，而且它具有 M 中有限和的同样性质。那么在 M_2 应成立与(10,1)和(10,2)相同的形式

的语句，即在M_2成立

(10,25) $q\in \mathrm{ft}_2(N_2,R_2)\longrightarrow(\exists s)[s\in \mathrm{ft}_2(N_2,R_2)$
$\wedge s(1)=q(1)\wedge(\forall l)[l\in N_2\longrightarrow s(l+1)$
$=s(l)+q(l+1)]\wedge(\forall t)[t\in \mathrm{ft}_2(N_2,R_2)$
$\wedge t(1)=q(1)\wedge(\forall l)[l\in N_2\longrightarrow t(l+1)$
$=t(l)+q(l+1)]\longrightarrow t=s]]$.

(10,26) $\Sigma_2\in \mathrm{ft}_2(\mathrm{ft}_2(N_2,R_2),\mathrm{ft}_2(N_2,R_2))\wedge(\forall q)$
$[q\in \mathrm{ft}_2(N_2,R_2)\longrightarrow \Sigma_2(q)(1)=q(1)$
$\wedge(\forall l)[l\in N_2\longrightarrow \Sigma_2(q)(l+1)$
$=\Sigma_2(q)(l)+q(l+1)]]$.

不仅如此，在M_2也应可以构成有限和的第二种定义。为此，我们以pre_2N_2表示N_2的前段子集，确切含义是

(10,27) $p\in \mathrm{pre}_2N_2\longleftrightarrow p\sqsubset N_2\wedge(\forall x)(\forall y)$
$[x\in p\wedge y\in N_2\setminus p\longrightarrow x<y]$.

我们以prem_2N_2表示N_2的前中段子集，确切含义是

(10,28) $x\in \mathrm{prem}_2N_2\longleftrightarrow x\in \mathrm{pre}_2N_2\vee(\exists y)[x\sqsubset y$
$\wedge y\in \mathrm{pre}_2N_2\wedge y\setminus x\in \mathrm{pre}_2N_2]$.

类似于M中的(10,9)，我们设在M_2成立关系

(10,29) $q\in \mathrm{ft}_2(N_2,R_2)\longrightarrow(\exists s)[s\in \mathrm{ft}_2(\mathrm{prem}_2N_2,$
$R_2)\wedge(\forall x)[x\in N_2\longrightarrow s(\{x\})=q(x)]$
$\wedge(\forall p)(\forall t)[p\in \mathrm{pre}_2N_2\wedge p\sqcup t\in \mathrm{pre}_2N_2$
$\wedge p\sqcap t=\phi\longrightarrow s(p\sqcup t)=s(p)+s(t)]$
$\wedge(\forall s_1)[s_1\in \mathrm{ft}_2(\mathrm{prem}_2N_2,R_2)\wedge(\forall x)$
$[x\in N_2\longrightarrow s_1(\{x\})=q(x)]\wedge(\forall p)$
$(\forall t)[q\in \mathrm{pre}_2N_2\wedge p\sqcup t\in \mathrm{pre}_2N_2\wedge p\sqcap t$
$=\phi\longrightarrow s_1(p\sqcup t)=s_1(p)+s_1(t)]\longrightarrow s_1$
$=s]]$.

即我们设在M_2中也可以引进有限和的第二种定义

(10,30) $\quad \dot{\Sigma}_2 \in \mathrm{ft}_2(\mathrm{ft}_2(N_2, R_2), \mathrm{ft}_2(\mathrm{prem}_2 N_2, R_2))$

$\wedge (\forall q)[q \in \mathrm{ft}_2(N_2, R_2) \longrightarrow (\forall x)[x \in N_2$

$\longrightarrow \dot{\Sigma}_2(q)(\{x\}) = q(x)] \wedge (\forall p)(\forall t)$

$[p \in \mathrm{pre}_2 N_2 \wedge p \cup t \in \mathrm{pre}_2 N_2 \wedge p \cap t = \phi$

$\longrightarrow \dot{\Sigma}_2(q)(p \cup t) = \dot{\Sigma}_2(q)(p)$

$+ \dot{\Sigma}_2(q)(t)]]$.

而且成立

(10,31) $\quad \Sigma_2(q)(n) = \dot{\Sigma}_2(q)(|1, n|_2)$,

其中$n \in N_2$，而且

(10,32) $\quad x \in |1, n|_2 \longleftrightarrow x \in N_2 \wedge 1 \leqslant x \leqslant n$.

最后设M_2中的 和 “$\dot{\Sigma}_2$” 满足以下三性质

(10,33) $\quad t \in \mathrm{prem}_2 N_2 \wedge (\forall x)[x \in t \longrightarrow q(x) = 0]$

$\longrightarrow \dot{\Sigma}_2(q)(t) = 0$,

(10,34) $\quad t \in \mathrm{prem}_2 N_2 \wedge (\forall x)[x \in t \longrightarrow q_1(x) \geqslant$

$q_2(x)] \longrightarrow \dot{\Sigma}_2(q_1)(t) \geqslant \dot{\Sigma}_2(q_2)(t)$,

(10,35) $\quad t \in \mathrm{prem}_2 N_2 \wedge (\forall x)[x \in t \longrightarrow q_1(x)$

$= q_2(x)] \longrightarrow \dot{\Sigma}_2(q_1)(t) = \dot{\Sigma}_2(q_2)(t)$.

以上三性质类似于M的性质(10,13)，(10,14)和(10,15)，这样，我们在M_2中引入了有限和“Σ_2”与“$\dot{\Sigma}_2$”，它与M中的有限和“Σ”与“$\dot{\Sigma}$”具有相同的性质。

进一步，我们设Σ_2和$\dot{\Sigma}_2$是$*\Sigma$和$*\dot{\Sigma}$的扩张。这也就是说在M_2成立

(10,36) $\quad (\forall q)[q \in *\mathrm{ft}(*N, *R) \longrightarrow *\Sigma(q)$

$= \Sigma_2(q)]$,

(10,37) $(\forall q)[q\in {}^*\mathrm{ft}({}^*N,{}^*R)\longrightarrow {}^*\dot{\Sigma}(q)$
$=\dot{\Sigma}_2(q)]$.

现在举一个例子，说明这种扩张将导致矛盾。

在Γ取常量$a\in\mathrm{ft}(N,R)$，具体定义为

(10,38) $a(n)=1,\ \forall n\in N$.

由(10,12)可看出

(10,39) $\Sigma(a)(n)=\dot{\Sigma}(a)(|1,n|)=n,\qquad \forall n\in N$.

由公设(5,2)，通过＊——映射，将(10,38)和(10,39)变到$^*M$，我们在$^*\Gamma$有常量$^*a\in{}^*\mathrm{ft}({}^*N,{}^*R)$，具体定义为

(10,40) $^*a(n)=1,\ \forall n\in{}^*N$.

又成立

(10,41) $^*\Sigma({}^*a)(n)={}^*\dot{\Sigma}({}^*a)({}^*|1,n|)=n,$
$\forall n\in{}^*N$.

由(10,36)和(10,37)得

(10,42) $\Sigma_2({}^*a)(n)=\dot{\Sigma}_2({}^*a)(|1,n|_2)=n,$
$\forall n\in N_2$.

又在Γ_2取常量$a_2\in\mathrm{ft}_2(N_2,R_2)$，具体定义为

(10,43) $$a_2(n)=\begin{cases}1, & n\in N_1\\ 0, & n\in N_2\backslash N_1.\end{cases}$$

请注意，在M_2成立以下关系

(10,44) $$\begin{cases}N_1\in\mathrm{pre}_2N_2\\ N_1\in\mathrm{prem}_2N_2\\ |1,n|_2\backslash N_1\in\mathrm{prem}_2N_2,\ \forall n\in N_2\backslash N_1.\end{cases}$$

现在任取$n\in N_2\backslash N_1$，则成立

(10,45) $$\begin{cases}|1,n|_2\in\mathrm{pre}_2N_2\\ |1,n|_2\backslash N_1\in\mathrm{prem}_2N_2.\end{cases}$$

又记

$$(10,46)\qquad b=\dot{\Sigma}_2(a_2)(N_1).$$

那么$b\in R_2$。由(10,30)，(10,33)和(10,45)得

$$(10,47)\qquad \dot{\Sigma}_2(a_2)(|1,n|_2)$$
$$=\dot{\Sigma}_2(a_2)(N_1)+\dot{\Sigma}_2(a_2)(|1,n|_2\backslash N_1)$$
$$=\dot{\Sigma}_2(a_2)(N_1)=b>0.$$

又由于

$$(10,48)\qquad *a(x)\geqslant a_2(x),$$

故由(10,34)得

$$(10,49)\qquad \dot{\Sigma}_2(*a)(|1,n|_2)\geqslant\dot{\Sigma}_2(a_2)(|1,n|_2).$$

注意到$*|1,n|$即$|1,n|_2$，由(10,41)和(10,47)得

$$(10,50)\qquad n\geqslant b,\quad \forall n\in N_2\backslash N_1.$$

又任取$m\in N_1$，则成立

$$(10,51)\qquad \begin{cases}|1,m|_2\in \mathrm{pre}_2N_2,\\ N_1\backslash|1,m|_2\in \mathrm{prem}_2N_2.\end{cases}$$

由于这时对任意的$x\in|1,m|_2$成立

$$(10,52)\qquad *a(x)=a_2(x),$$

故由(10,35)得

$$(10,53)\qquad \dot{\Sigma}_2(*a)(|1,m|_2)$$
$$=\dot{\Sigma}_2(a_2)(|1,m|_2)=m.$$

由(10,30),(10,33)和(10,34)得

$$(10,54)\qquad \dot{\Sigma}_2(a_2)(N_1)$$
$$=\dot{\Sigma}_2(a_2)(N_1\backslash|1,m|_2)+\dot{\Sigma}_2(a_2)(|1,m|_2)$$

和

$$(10,55)\qquad b\geqslant m,\quad \forall m\in N_1.$$

由(10,55)知b是正无限大。但由(10,50)，(5,5)和(10,47)又推得b是有限数，从而得到矛盾。因此，在M_2定义有限和使得：①与M的有限和具有相同的性质，②局限到$*M$上与$*M$的有限和相同；这样的有限和是不可能在M_2定义的。

由此可以看出，一些分析学中的概念，必须在M，$*M$和M_2中具体地进行讨论和比较，才能认清其相同和不同之点，作到概念明确，不发生混淆。

以下讨论乘积问题。

我们知道，关于有限乘积，在M成立以下关系

(10,56) $$q\in \mathrm{ft}(N,R)\longrightarrow(\exists p)[p\in \mathrm{ft}(N,R)\wedge p(1)=q(1)\wedge(\forall l)[l\in N\longrightarrow p(l+1)=p(l)q(l+1)]\wedge(\forall t)[t\in \mathrm{ft}(N,R)\wedge t(1)=q(1)\wedge(\forall l)[l\in N\longrightarrow t(l+1)=t(l)q(l+1)]\longrightarrow t=p]].$$

故在M可以如下定义有限乘积

(10,57) $$\Pi\in \mathrm{ft}(\mathrm{ft}(N,R),\mathrm{ft}(N,R))\wedge(\forall q)[q\in \mathrm{ft}(N,R)\longrightarrow\Pi(q)(1)=q(1)\wedge(\forall l)[l\in N\longrightarrow\Pi(q)(l+1)=\Pi(q)(l)q(l+1)]].$$

在习惯，我们写作

(10,58) $$\Pi(q)(n)=\prod_{i=1}^{n}q(i).$$

由公设(5,2)，通过$*$——映射，以上三式在$*M$的表示分别为

(10,59) $$q\in *\mathrm{ft}(*N,R)\longrightarrow(\exists p)[p\in *\mathrm{ft}(*N,*R)\wedge p(1)=q(1)\wedge(\forall l)[l\in *N\longrightarrow p(l+1)=p(l)q(l+1)]\wedge(\forall t)[t\in *\mathrm{ft}(*N,*R)\wedge t(1)=q(1)\wedge(\forall l)[l\in *N\longrightarrow t(l+1)=t(l)q(l+1)]\longrightarrow t=p]]$$

$$(10,60)\quad *\Pi\in *\mathrm{ft}(*\mathrm{ft}(*N,*R),*\mathrm{ft}(*N,*R))\wedge(\forall q)[q\in *\mathrm{f}_t(*N,*R)\longrightarrow *\Pi(q)(1)=q(1)\wedge(\forall l)[l\in *N\longrightarrow *\Pi(q)(l+1)=*\Pi(q)(l)q(l+1)]].$$

在习惯上，我们也可以写作

$$(10,61)\quad *\Pi(q)(n)=*\prod_{i=1}q(i).$$

这样，我们在 $*M$ 中有了有限乘积“$*\Pi$”。同样，$*\Pi$ 也不能扩大到 M_2 中，这个我们就不详细讨论了。

下面研究二项式定理。

在 Γ 中取常量 $a\in\mathrm{ft}(R,\mathrm{ft}(N,R))$，那么 $a(x)\in\mathrm{ft}(N,R)$，具体定义为

$$(10,62)\quad a(x)(n)=x.$$

根据有限乘积“Π”的意义，我们定义

$$(10,63)\quad x^n=\Pi(a(x))(n)=\prod_{i=1}^{n}a(x)(i).$$

而且有指数律

$$(10,64)\quad X^nX^m=X^{n+m}.$$

由公设(5,2)，通过 $*$——映射，把以上三式转到 $*M$，在 $*\Gamma$ 有常量 $*a\in *\mathrm{ft}(*R,*\mathrm{ft}(*N,*R))$，那么 $*a(x)\in *\mathrm{ft}(*N,*R)$，具体定义为

$$(10,65)\quad *a(x)(n)=x.$$

那么根据“$*\Pi$”的意义，我们有

$$(10,66)\quad *(X^n)=*\Pi(*a(x))(n)=*\prod_{i=1}^{n}*a(x)(i).$$

在不引起混乱时，仍记 $*(X^n)=X^n$，则在 $*M$ 有指数律

$$(10,67)\quad X^nX^m=X^{n+m}.$$

又在 Γ 中取常量 $b\in\mathrm{ft}(N,N)$ 具体定义为

(10,68) $b(n)=n$.

那么在M中阶乘的定义为

(10,69) $n! = \Pi(b)(n)$.

又规定$0! = 1$。

由公设(5,2)，通过*——映射，把以上二式转到$*M$，在$*\Gamma$有常量$*b \in *\mathrm{ft}(*N, *N)$，具体定义为

(10,70) $*b(n)=n$.

在$*M$中阶乘的定义为

(10,71) $n*! = *\Pi(*b)(n)$,

又规定$o*! = 1$。

在M中组合的定义为

(10,72) $C \in \mathrm{ft}(D, N) \wedge$

$$C_a^n = \frac{n!}{a!\ (n-a)!},$$

这里D的定义为

(10,73) $(n,a) \in D \longleftrightarrow [[n=0 \vee n \in N] \wedge [a=0 \vee a \in N] \wedge 0 \leqslant a \leqslant n]$.

由公设(5,2)，通过*——映射，将以上二式转到$*M$，我们有

(10,74) $*C \in *\mathrm{ft}(*D, *N) \wedge$

$$*C_a^n = \frac{n*!}{a*!\ (n-a)*!},$$

这里$*D$的定义为

(10,75) $(n,a) \in *D \longleftrightarrow [[n=0 \vee n \in *N] \wedge [a=0 \wedge a \in *N] \vee 0 \leqslant a \leqslant n]$.

在M中二项式定理可以表述为

(10,76) $(x+y)^n = \Sigma(a(x,y,n))(n+1)$,

其中

(10,77) $a \in \mathrm{ft}(R \times R \times N, \mathrm{ft}(N, R)) \wedge a(x, y, n) \in \mathrm{ft}(N, R) \wedge a(x, y, n)(l) = C_{l-1}^{n} x^{n-l+1} y^{l-1}$.

由公设(5,2),通过 * ——映射，在 * M有二项式定理

(10,78)
$$(x+y)^n = {}^*\Sigma({}^*a(x,y,n))(n+1) = {}^*\sum_{l=1}^{n+1} {}^*a(x,y,n)(l) = {}^*\sum_{i=1}^{n} {}^*C_i^n x^{n-i} y^i,$$

其中

(10,79)
$${}^*a(x,y,n)(l) = {}^*C_{l-1}^{n} x^{n-l+1} y^{l-1}.$$

通过以上讨论，得到了 * M中的二项式定理。为了得到它，我们必须先搞清有限和与有限乘积在 * M的表示。由此可见形式语言的作用。只有当我们把M中的语句形式化了，才能够更准确地使用公设(5,2)，通过 * ——映射，把M的语句化为 * M的语句。

当然，我们并不打算把M全盘形式化，我们的目的仅仅是为了搞清概念，使得从M到 * M进行语句转换时作到正确无误，使得将 * M与M_2进行语句比较时作到正确无误。只有作到了必要的形式化，才能将逻辑推理的语言与分析学的具体对象加以区分，这样才便于对M，* M和M_2的理论进行比较分析。

第三章 极限和连续

本章的主要对象是研究极限和连续概念在M，$*M$和M_2中的相同和不同．通过§9的讨论，我们知道，区间这个概念没有内和外的差别，即M_2的区间都是内的．我们在那里讨论了九种基本区间．但是函数的概念就有内外之分，准确的表达式请参看（9,12）．从逻辑学的角度来看，凡是一阶语言的句子没有内外之分，高阶的则不然．因此，对微积分学的基本概念，应仔细考察一下。本章涉及的是与极限和连续性有关的基本概念．

§11 序列的极限

本节讨论的对象是序列极限概念在M，$*M$和M_2中的异同．按照我们的记号，M中的序列就是$\mathrm{ft}(N,R)$的元素．假设$x\in\mathrm{ft}(N,R)$和$p\in R$，在M中序列的极限是如下定义的

$$(11,1)\qquad \lim_{n\to\infty}x(n)=p\longleftrightarrow(\forall\varepsilon)[\varepsilon>0\longrightarrow(\exists m)[m\in N\wedge(\forall n)[n\in N\wedge m<n\longrightarrow|x(n)-p|<\varepsilon]]].$$

由公设(5,2)，通过$*$——映射把(11,1)转到$*M$。设$x\in *\mathrm{ft}(*N,*R)$和$p\in *R$，在$*M$中$*$〔序列〕的$*$〔极限〕如下定义

$$(11,2)\qquad *\lim_{n\to\infty}x(n)=p\longleftrightarrow(\forall\varepsilon)[\varepsilon>0\to(\exists m)[m\in *N\wedge(\forall n)[n\in *N\wedge m<n\longrightarrow|x(n)-p|<\varepsilon]]].$$

在M_2中，若$x\in\mathrm{ft}_2(N_2,R_2)$和$p\in R_2$，可以定义$M_2$〔序列〕的$M_2$〔极限〕如下：

(11,3) $M_2\lim\limits_{n\to\infty_2} x(n)=p$

$\longleftrightarrow(\forall\varepsilon)[\varepsilon>0\longrightarrow(\exists m)[m\in N_2\wedge(\forall n)$

$[n\in N_2\wedge m<n\rightarrow|x(n)-p|<\varepsilon]]]$.

由 (9,12) 可得

(11,4) $x\in {}^*\mathrm{ft}({}^*N,{}^*R)\longleftrightarrow x\in{}^*\Gamma\wedge x\in\mathrm{ft}_2$

(N_2,R_2).

由 (11,2) 和 (11,3) 可得

(11,5) $x\in{}^*\mathrm{ft}({}^*N,{}^*R)\wedge p\in{}^*R\longrightarrow[{}^*\lim\limits_{n\to{}^*\infty}x(n)=p$

$\longleftrightarrow M_2\lim\limits_{n\to\infty_2}x(n)=p]$.

由此可得在M_2成立

(11,6) $x\in{}^*\mathrm{ft}({}^*N,{}^*R)\wedge p\in{}^*R\wedge{}^*\lim\limits_{n\to{}^*\infty}x(n)=p$

$\longleftrightarrow x\in{}^*\Gamma\wedge x\in\mathrm{ft}_2(N_2,R_2)\wedge p\in R_2\wedge$

$M_2\lim\limits_{n\to\infty_2}x(n)=p$.

特别在a和b是常量的情况下，在M中成立语句

(11,7) $a\in\mathrm{ft}(N,R)\wedge b\in R\wedge\lim\limits_{n\to\infty}a(n)=b$,

它等价于在$^*M$成立语句

(11,8) ${}^*a\in{}^*\mathrm{ft}({}^*N,{}^*R)\wedge{}^*b\in{}^*R\wedge$

${}^*\lim\limits_{n\to{}^*\infty}{}^*a(n)={}^*b$,

这可由公设(5,2)通过 * ——映射直接看出.以上二式所描述的是关于标准函数以标准数为标准极限的情况.

以下讨论以无穷为极限的情况.设 $x\in\mathrm{ft}(N,R)$, 在M有以下定义

(11,9) $\lim\limits_{n\to\infty}x(n)=\begin{cases}\infty\\-\infty\\\pm\infty\end{cases}$

$$\longleftrightarrow (\forall s)[s \in N \longrightarrow (\exists t)[t \in N \wedge (\forall n)[n \in N \wedge t < n \longrightarrow s < \begin{cases} |x(n)| \\ x(n) \\ -x(n) \end{cases}]]].$$

由公设(5,2)，把上式转到$*M$，设$x \in *\mathrm{ft}(*N, *R)$，在$*M$有以下定义

$$(11,10) \qquad *\lim_{n \to *\infty} x(n) = \begin{cases} *\infty \\ +*\infty \\ -*\infty \end{cases}$$

$$\longleftrightarrow (\forall s)[s \in *N \longrightarrow (\exists t)[t \in *N \wedge (\forall n)[n \in *N \wedge t < n \longrightarrow s < \begin{cases} |x(n)| \\ x(n) \\ -x(n) \end{cases}]]].$$

在M_2若$x \in \mathrm{ft}_2(N_2, R_2)$，同样可以定义

$$(11,11) \qquad M_2 \lim_{n \to \infty_2} x(n) = \begin{cases} \infty_2 \\ +\infty_2 \\ -\infty_2 \end{cases}$$

$$\longleftrightarrow (\forall s)[s \in N_2 \longrightarrow (\exists t)[t \in N_2 \wedge (\forall n)[n \in N_2 \wedge t < n \longrightarrow s < \begin{cases} |x(n)| \\ x(n) \\ -x(n) \end{cases}]]].$$

由(11,4)，(11,10)和(11,11)得

$$(11,12) \qquad x \in *\mathrm{ft}(*N, *R) \longrightarrow [*\lim_{n \to *\infty} x(n) = \begin{cases} *\infty \\ +*\infty \\ -*\infty \end{cases}$$

$$\longleftrightarrow M_2 \lim_{n\to\infty_2} x(n) = \begin{cases} \infty_2 \\ +\infty_2 \\ -\infty_2 \end{cases}].$$

由此可得在M_2成立

(11,13) $$x \in {}^*\mathrm{ft}({}^*N, {}^*R) \wedge {}^*\lim_{n\to{}^*\infty} x(n) = \begin{cases} {}^*\infty \\ +{}^*\infty \\ -{}^*\infty \end{cases}$$

$$\longleftrightarrow x \in {}^*\Gamma \wedge x \in \mathrm{ft}_2(N_2, R_2) \wedge$$

$$M_2 \lim_{n\to\infty_2} x(n) = \begin{cases} \infty_2 \\ +\infty_2 \\ -\infty_2 \end{cases}.$$

根据以上定义，设$x, y, z \in \mathrm{ft}(N, R)$和$p, q \in R$，则在标准分析$M$中成立以下公式

(11,14) 1. $\lim_{n\to\infty} x(n) = p$

$\wedge \lim_{n\to\infty} y(n) = q \wedge x(n) = y(n) \longrightarrow p = q$,

2. $\lim_{n\to\infty} x(n) = p$

$\wedge \lim_{n\to\infty} y(n) = q \wedge x(n) \geqslant y(n) \longrightarrow p \geqslant q$,

3. $\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{n\to\infty} z(n) = p$

$\wedge x(n) \leqslant y(n) \leqslant z(n) \longrightarrow \lim_{n\to\infty} y(n) = p$

4. $\lim_{n\to\infty} x(n) = p$

$\wedge \lim_{n\to\infty} y(n) = q$

$$\longrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}(x(n)\pm y(n))=p\pm q,\\ \lim\limits_{n\to\infty}(x(n)y(n))=pq,\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(n)}{y(n)}=\dfrac{p}{q},\ \text{若}q\neq 0,\ y(n)\neq 0,\end{cases}$$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}x(n)=p$

$\wedge\lim\limits_{n\to\infty}y(n)=\infty\wedge y(n)\neq 0$

$\longrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(n)}{y(n)}=0,$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}x(n)=p$

$\wedge\lim\limits_{n\to\infty}y(n)=0\wedge p\cdot y(n)\neq 0$

$\longrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(n)}{y(n)}=\infty,$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}x(n)=\infty$

$\wedge\lim\limits_{n\to\infty}y(n)=p\wedge y(n)\neq 0$

$\longrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(n)}{y(n)}=\infty,$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}x(n)=p$

$\wedge\lim\limits_{n\to\infty}y(n)=\infty\wedge p\neq 0$

$\longrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}(x(n)y(n))=\infty,$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}x(n)=\infty$

$\wedge\lim\limits_{n\to\infty}y(n)=p\longrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}(x(n)\pm y(n))=\infty,$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}x(n)=+\infty$

$$\wedge \lim_{n\to\infty} y(n) = +\infty$$

$$\longrightarrow \lim_{n\to\infty}(x(n)+y(n)) = +\infty.$$

由公设(5,2)，通过＊——映射，将以上十个公式转到 $*M$，设 $x, y, z \in *\mathrm{fl}(*N, *R)$ 和 $p, q \in *R$，在 $*M$ 成立以下十个公式

(11,15)

1. $$*\lim_{n\to*\infty} x(n) = p \wedge *\lim_{n\to*\infty} y(n) = q \wedge x(n) = y(n) \longrightarrow p = q,$$

2. $$*\lim_{n\to*\infty} x(n) = p \wedge *\lim_{n\to*\infty} y(n) = q \wedge x(n) \geqslant y(n) \longrightarrow p \geqslant q,$$

3. $$*\lim_{n\to*\infty} x(n) = *\lim_{n\to*\infty} z(n) = p \wedge x(n) \leqslant y(n) \leqslant z(n) \longrightarrow *\lim_{n\to*\infty} y(n) = p,$$

4. $$*\lim_{n\to*\infty} x(n) = p \wedge *\lim_{n\to*\infty} y(n) = q$$

$$\longrightarrow \begin{cases} *\lim\limits_{n\to*\infty}(x(n) \pm y(n)) = p \pm q, \\ *\lim\limits_{n\to*\infty}(x(n)y(n)) = pq, \\ *\lim\limits_{n\to*\infty} \dfrac{x(n)}{y(n)} = \dfrac{p}{q}, \text{若} q \neq 0, y(n) \neq 0, \end{cases}$$

5. $$*\lim_{n\to*\infty} x(n) = p \wedge *\lim_{n\to*\infty} y(n) = *\infty \wedge y(n) \neq 0 \longrightarrow *\lim_{n\to*\infty} \frac{x(n)}{y(n)} = 0,$$

6. $$*\lim_{n\to*\infty} x(n) = p \wedge *\lim_{n\to*\infty} y(n) = 0 \wedge p \cdot y(n) \neq 0 \longrightarrow *\lim_{n\to*\infty} \frac{x(n)}{y(n)} = *\infty,$$

7. $$*\lim_{n\to*\infty} x(n) = *\infty \wedge *\lim_{n\to*\infty} y(n) = p \wedge y(n) \neq 0$$

$$\longrightarrow {}^*\lim_{n\to {}^*\infty} \frac{x(n)}{y(n)} = {}^*\infty,$$

8. $${}^*\lim_{n\to{}^*\infty} x(n) = p \wedge {}^*\lim_{n\to{}^*\infty} y(n) = {}^*\infty \wedge p \neq 0$$

$$\longrightarrow {}^*\lim_{n\to{}^*\infty}(x(n)y(n)) = {}^*\infty,$$

9. $${}^*\lim_{n\to{}^*\infty} x(n) = {}^*\infty \wedge {}^*\lim_{n\to{}^*\infty} y(n) = p \longrightarrow$$

$${}^*\lim_{n\to{}^*\infty}(x(n) \pm y(n)) = {}^*\infty,$$

10. $${}^*\lim_{n\to{}^*\infty} x(n) = +{}^*\infty \wedge {}^*\lim_{n\to{}^*\infty} y(n) = +{}^*\infty$$

$$\longrightarrow {}^*\lim_{n\to{}^*\infty}(x(n)+y(n)) = +{}^*\infty.$$

关于序列极限的这些性质，为了使人感到心里踏实，我们还是不厌其烦的写出来。因为在分析理论中，极限是基础.有趣的是，关于序列极限的这些基本性质，在M_2仍然是成立的，今详细写出如下.设$x, y, z \in \mathrm{ft}_2(N_2, R_2)$和$p, q \in R_2$， 在$M_2$成立以下十条公式

(11,16) 1. $$M_2\lim_{n\to\infty_2} x(n) = p \wedge M_2\lim_{n\to\infty_2} y(n) = q \wedge$$

$$x(n) = y(n) \longrightarrow p = q,$$

2. $$M_2\lim_{n\to\infty_2} x(n) = p \wedge M_2\lim_{n\to\infty_2} y(n) = q$$

$$\wedge\, x(n) \geqslant y(n) \longrightarrow p \geqslant q,$$

3. $$M_2\lim_{n\to\infty_2} x(n) = M_2\lim_{n\to\infty_2} z(n) = p$$

$$\wedge\, x(n) \leqslant y(n) \leqslant z(n) \longrightarrow M_2\lim_{n\to\infty_2} y(n) = p,$$

4. $$M_2\lim_{n\to\infty_2} x(n) = p \wedge M_2\lim_{n\to\infty_2} y)n) = q$$

$$\longrightarrow \begin{cases} M_2\lim_{n\to\infty_2}(x(n) \pm y(n)) = p \pm q, \\ M_2\lim_{n\to\infty_2} x(n), y(n) = pq, \\ M_2\lim_{n\to\infty_2} \dfrac{x(n)}{y(n)} = \dfrac{p}{q}\text{，若}q \neq 0, y(n) \neq 0, \end{cases}$$

5. $M_2\lim\limits_{n\to\infty_2} x(n)=p\wedge M_2\lim\limits_{n\to\infty_2} y(n)=\infty_2$

$$\wedge y(n)\neq 0\longrightarrow M_2\lim_{n\to\infty_2}\frac{x(n)}{y(n)}=0,$$

6. $M_2\lim\limits_{n\to\infty_2} x(n)=p\wedge M_2\lim\limits_{n\to\infty_2} y(n)=0$

$$\wedge p\cdot y(n)\neq 0\longrightarrow M_2\lim_{n\to\infty_2}\frac{x(n)}{y(n)}=\infty_2,$$

7. $M_2\lim\limits_{n\to\infty_2} x(n)=\infty_2\wedge M_2\lim\limits_{n\to\infty_2} y(n)=p$

$$\wedge y(n)\neq 0\longrightarrow M_2\lim_{n\to\infty_2}\frac{x(n)}{y(n)}=\infty_2,$$

8. $M_2\lim\limits_{n\to\infty_2} x(n)=p\wedge M_2\lim\limits_{n\to\infty_2} y(n)=\infty_2$

$$\wedge p\neq 0\longrightarrow M_2\lim_{n\to\infty_2}(x(n)y(n))=\infty_2,$$

9. $M_2\lim\limits_{n\to\infty_2} x(n)=\infty_2\wedge M_2\lim\limits_{n\to\infty_2} y(n)=p$

$$\longrightarrow M_2\lim_{n\to\infty_2}(x(n)\pm y(n))=\infty_2,$$

10. $M_2\lim\limits_{n\to\infty_2} x(n)=+\infty_2\wedge M_2\lim\limits_{n\to\infty_2} y(n)=+\infty_2$

$$\longrightarrow M_2\lim_{n\to\infty_3}(x(n)+y(n))=+\infty_2.$$

虽然在M_2中极限运算的基本公式(11，16)与M的公式(11，14)没有什么差别，但在整个M_2上并建立不了微积分理论，因为在$*R$上完备性公理不成立。请注意，上述十条极限性质只涉及O型变量之间的关系，所以M和M_2之间没有明显的差别。从逻辑上看，它们都是用了相同的一阶逻辑。

公式(11，16)的十条性质是需要独立地加以证明，证明的方法与标准分析完全一样，读者可参考菲赫金哥尔兹〔1〕。

以下举一个例题。

【例】 在M_2中的常量$a\in \mathrm{ft}_2(N_2,R_2)$，具体定义为

$$(11,17)\qquad a(n)=\begin{cases}1, & n\in N_1,\\ \dfrac{1}{n}, & n\in N_2\setminus N_1.\end{cases}$$

不难看出

$$(11,18)\qquad M_2\lim_{n\to\infty_2}a(n)=0.$$

由此可以看出，M_2有自己独立的极限运算，它的作用对象不只是$*\mathrm{ft}(*N,*R)$，本例中的a不属于$*\mathrm{ft}(*N,*R)$．

(11,6)表示了内的和外的极限的关系，只有当其作用对象为内函数时，即$x\in*\mathrm{ft}(*N,*R)$，二者才相同．而内极限$*\lim$)只能作用在内函数上．但从形式上看，内极限的十条性质(11,15)与外极限的十条性质(11,16)是相同的．

§12 两相微积分中基本概念的比较

通过前几节的讨论，我们知道：①M_2中有些概念与$*M$是相同的，如§7所讨论的绝对值的概念，§9所讨论的区间的概念；②M_2有些概念与$*M$是不同的，如(9,12)所表示的函数概念，$*M$的与M_2的就不等价，集合的概念也是这样；③M_2有些概念与$*M$虽有不同，但有些重要性质却一样，如上节所讨论的极限概念．极限是微积分中一个重要运算，M_2中的极限运算作用在M_2的函数上，$*M$中的极限运算作用在$*M$的函数上，这一点是不同的，但极限运算的性质，如(11,15)与(11,16)又是相同的．因此，我们必须对微积分学中的重要概念逐一加以研究，将$*M$中的概念与M_2的同类概念加以比较，搞清他们的异同，才能使思维更加准确，概念更加清晰．

另一方面，公设(5,2)比较抽象，本节通过很多具体概念的讨论，将M中的常见对象，通过公设(5,2)转移到$*M$中去，并对它的具体含义加以说明．这样，公设(5,2)就具体化了．

为了避免引入更多的符号，我们采用以下的办法进行半形化的处理．若S是M的一个语句，以$*〔S〕$表示由公设(5,2)对应的在$*M$中的语句，以$M_2〔S〕$表示在M_2中按同样的逻辑关系所组成的语句．

以下进行具体的讨论．我们将不厌其烦地一个概念接一个地讨论．

1．上界　若p是非空实数集，$m\in R$，在M有以下定义

(12.1)　　m是集合p的上界$\longleftrightarrow(\forall x)〔p(x)\longrightarrow x\leqslant m〕$，

在这里，$p(x)$与$x\in p$的含义相同．通过公设(5,2)，将(12.1)转到$*M$，若p是$*R$的非空子集，$m\in *R$，我们有

(12,2)　　$*〔m$是集合p的上界$〕\longleftrightarrow(\forall x)〔p(x)\longrightarrow x\leqslant m〕$．

在M_2中，我们同样可以引进上述定义．若p是R_2的非空子集，$m\in R_2$，我们有定义

(12,3)　　$M_2〔m$是集合p的上界$〕\longleftrightarrow(\forall x)〔p(x)\longrightarrow x\leqslant m〕$．

注意到$*R=R_2$，利用(6,1)，在M_2我们有以下公式

(12,4)　　$*〔m$是集合p的上界$〕\longleftrightarrow p\in *\Gamma\wedge M_2〔m$是集合$p$的上界$〕$．

类似地，我们可以定义〔m是集合p的下界〕，$*$〔m是集合p的下界〕和M_2〔m是集合p的下界〕，而且在M_2成立以下公式

(12,5)　　$*〔m$是集合p的下界$〕\longleftrightarrow p\in *\Gamma\wedge M_2〔m$是集合$p$的下界$〕$．

2．上确界　若p是R的非空子集，$s\in R$，在M有以下定义

(12,6)　　$s=\sup(p)\longleftrightarrow〔s$是集合$p$的上界$〕\wedge(\forall x)〔x$是集合$p$的上界$\longrightarrow s\leqslant x〕$．

众所周知，“sup”是表示“上确界”的意思．由公设(5,2)，通过$*$——映射，把(12,6)转换到$*M$，我们有以下定义：

若p是$*R$的非空子集（内的），$s\in *R$，于是成立

(12,7) $s=*\sup(p)\longleftrightarrow *$〔$s$是集合$p$的上界〕$\wedge(\forall x)$
〔$*$〔x是集合p的上界〕$\longrightarrow s\leqslant x$〕.

在M_2中若p是R_2的非空子集，$s\in R_2$，我们可以引入定义

(12,8) $s=\sup_2(p)\longleftrightarrow M_2$〔$s$是集合$p$的上界〕$\wedge(\forall x)$
〔M_2〔x是集合p的上界〕$\longrightarrow s\leqslant x$〕.

利用(6,1)，在M_2我们有公式

(12,9) $s=*\sup(p)\longleftrightarrow p\in *\Gamma\wedge s=\sup_2(p)$.

类似地，我们可在M，$*M$和M_2中分别定义下确界，符号表示为"inf"，这样，我们也有以下概念：〔$s=\inf(p)$〕，〔$s=*\inf(p)$〕和〔$s=\inf_2(p)$〕.而且在M_2成立以下公式

(12,10) $S=*\inf(p)\longleftrightarrow p\in *\Gamma\wedge s=\inf_2(p)$.

3.有界集　若p是非空实数集，在M有以下定义

(12,11) 集合p有上界$\longleftrightarrow(\exists m)$〔$m$是集合$p$的上界〕.

由公设(5,2)，通过$*$——映射，将上式转到$*M$，若p是$*R$的非空子集，我们有

(12,12) $*$〔集合p有上界〕$\longleftrightarrow(\exists m)*$〔$m$是集合$p$的上界〕.

在M_2，若p是R_2的非空子集，可直接定义

(12,13) M_2〔集合p有上界〕$\longleftrightarrow(\exists m)M_2$〔$m$是集合$p$的上界〕.

又利用(6,1)可得

(12,14) $*$〔集合p有上界〕$\longleftrightarrow p\in *\Gamma\wedge M_2$〔集合$p$有上界〕.

类似地，我们可在M，$*M$和M_2分别定义〔集合p有下界〕，$*$〔集合p有下界〕和M_2〔集合p有下界〕.

而且在M_2成立

(12,15) $*$〔集合p有下界〕$\longleftrightarrow p\in *\Gamma\wedge M_2$〔集合$p$有下

界〕。

4.有确界的集合　若p是非空实数集，在M可以定义

(12,16)　　集合p有上确界$\longleftrightarrow(\exists s)[s=\sup(p)]$。

由公设(5,2)，将上式转到$*M$，若p是$*R$的非空子集，我们有以下定义

(12,17)　　$*$〔集合p有上确界〕$\longleftrightarrow(\exists s)[s=*\sup(p)]$。

在M_2，若p是R_2的非空子集，我们可以直接定义

(12,18)　　M_2〔集合p有上确界〕$\longleftrightarrow(\exists s)[s=\sup_2(p)]$。

又利用(6,1)可得

(12,19)　　$*$〔集合p有上确界〕$\longleftrightarrow p\in *\Gamma\wedge M_2$〔集合$p$有上确界〕。

类似地，我们可以在M，$*M$和M_2分别定义〔集合p有下确界〕，$*$〔集合p有下确界〕和M_2〔集合p有下确界〕，而且在M_2成立以下公式

(12,20)　　〔集合p有下确界〕$\longleftrightarrow p\in *\Gamma\wedge M_2$〔集合$p$有下确界〕。

5.集合的极大和极小　若p是R的非空子集，$m\in R$，在M有以下定义

(12,21)　　m是集合p的极大$\longleftrightarrow m=\sup(p)\wedge m\in p$。

由公设(5,2)，将上式转到$*M$，若p是$*R$的非空子集，$m\in *R$，我们有以下定义

(12,22)　　$*$〔m是集合p的极大〕$\longleftrightarrow m=*\sup(p)\wedge m\in p$。

在M_2若p是R_2的非空子集，$m\in R_2$，我们可以直接定义

(12,23)　　M_2〔m是集合p的极大〕$\longleftrightarrow m=\sup_2(p)\wedge m\in p$。

由(6,1)可得，在M_2成立以下等价关系

(12,24)　　$*$〔m是集合p的极大〕$\longleftrightarrow p\in *\Gamma\wedge M_2$〔$m$是集合$p$的极大〕。

类似地，在M，$*M$和M_2可分别定义〔m是集合p的极小〕，

$*$〔m是集合p的极小〕和M_2〔m是集合p的极小〕，而且在M_2成立

(12,25) $*$〔m是集合p的极小〕$\longleftrightarrow p \in *\Gamma \wedge M_2$〔$m$是集合$p$的极小〕.

6.在M成立完备性公理 按上面已经引进的概念，它可以表为以下命题

(12,26) 集合p有上界$\longrightarrow$集合p有上确界.

由公设(5,2)，将上式转到$*M$，我们有以下命题

(12,27) $*$〔集合p有上界〕$\longrightarrow *$〔集合p有上确界〕.

在M_2完备性公理不成立，例如集合N_1满足以下性质

(12,28) M_2〔集合N_1有上界〕$\wedge M_2$〔集合N_1没有上确界〕.

或者，更明确地说，在M_2成立以下语句

(12,29) $\neg(\forall p)$〔M_2〔集合p有上界〕$\longrightarrow M_2$〔集合p有上确界〕〕.

关于下界和下确界也可类似地讨论，这里就不细说了。

7.关于函数的界 设q是非空实数集，$p \in \mathrm{ft}(q, R)$，$m \in R$，在M有以下定义

(12,30) m是函数p在q的上界$\longleftrightarrow (\forall x)$〔$x \in q \longrightarrow p(x) \leqslant m$〕.

由公设(5,2)，将上式转到$*M$，若q是$*R$的非空子集，$p \in *\mathrm{ft}(q, *R)$，$m \in *R$，在$*M$有以下定义

(12,31) $*$〔m是函数p在q的上界〕$\longleftrightarrow (\forall x)$〔$x \in q \longrightarrow p(x) \leqslant m$〕.

在M_2，设q是R_2的非空子集，$p \in \mathrm{ft}_2(q, R_2)$，$m \in R_2$，我们可以直接定义

(12,32) M_2〔m是函数p在q的上界〕$\longleftrightarrow (\forall x)$〔$x \in q \longrightarrow p(x) \leqslant m$〕.

利用(6,1)可得

(12,33) $\quad *$〔m是函数p在q的上界〕$\longleftrightarrow p\in *\Gamma\wedge q\in *\Gamma\wedge$
M_2〔m是函数p在q的上界〕.

类似地可以在M，$*M$和M_2分别定义〔m是函数p在q的下界〕，$*$〔m是函数p在q的下界〕和M_2〔m是函数p在q的下界〕，而且成立

(12,34) $\quad *$〔m是函数p在q的下界〕$\longleftrightarrow p\in *\Gamma\wedge q\in *\Gamma\wedge$
M_2〔m是函数p在q的下界〕.

8.关于函数的确界　设q是R的非空子集，$p\in \mathrm{ft}(q,R)$，$s\in R$，关于函数的上确界，在M有以下定义

(12,35) $\quad s=\sup\limits_{x\in q}(p(x))\longleftrightarrow s$是函数$p$在$q$的上界$\wedge(\forall x)$〔$x$是函数$p$在$q$的上界$\longrightarrow s\leqslant x$〕.

由公设(5.2)，将上式转到$*M$，设q是$*R$的非空子集，$p\in *\mathrm{ft}(q,*R)$，$s\in *R$，我们有以下定义

(12,36) $\quad s=*\sup\limits_{x\in q}(p(x))\longleftrightarrow *$〔$s$是函数$p$在$q$的上界〕$\wedge$
$(\forall x)$〔$*$〔x是函数p在q的上界〕$\longrightarrow s\leqslant x$〕.

在M_2，若q是R_2的非空子集，$p\in \mathrm{ft}_2(q,R_2)$，$s\in R_2$，我们可直接定义

(12,37) $\quad s=\sup\limits_{x\in q}{}_2(p(x))\longleftrightarrow M_2$〔$s$是函数$p$在$q$的上界〕$\wedge$
$(\forall x)$〔M_2〔x是函数p在q的上界〕$\longrightarrow s\leqslant x$〕.

利用(6,1)可得

(12,38) $\quad s=*\sup\limits_{x\in q}(px))\longleftrightarrow p\in *\Gamma\wedge q\in *\Gamma$
$\wedge s=\sup\limits_{x\in q}{}_2(p(x))$.

关于函数的下确界，在M，$*M$和M_2可以类似的定义$s=\inf\limits_{x\in q}(p(x))$，$s=*\inf\limits_{x\in q}(p(x))$和$s=\sup\limits_{x\in q}{}_2(p(x))$。

而且成立

(12,39) $\quad s=*\inf\limits_{x\in q}(p(x))\longleftrightarrow p\in *\Gamma\wedge q\in *\Gamma\wedge s=\sup\limits_{x\in q}{}_2$

$(p(x))$。

进一步，在M可以定义

(12,40) 函数p在q有上界$\longleftrightarrow(\exists m)$〔$m$是函数$p$在$q$的上界〕。

由公设(5,2)，将上式转到$*M$，我们有定义

(12,41) $*$〔函数p在q有上界〕$\longleftrightarrow(\exists m)*$〔$m$是函数$p$在$q$的上界〕。

在M_2可直接定义

(12,42) M_2〔函数p在q有上界〕$\longleftrightarrow(\exists m)M_2$〔$m$是函数$p$在$q$的上界〕。

而且成立

(12,43) $*$〔函数p在q有上界〕$\longleftrightarrow p\in *\Gamma\wedge q\in *\Gamma\wedge M_2$〔函数$p$在$q$有上界〕。

类似地在M，$*M$和M_2可以定义：〔函数p在q有下界〕，〔函数p在q有上确界〕，〔函数p在q有下确界〕$*$〔函数p在q有下界〕，$*$〔函数p在q有上确界〕，$*$〔函数p在q有下确界〕，M_2〔函数p在q有下界〕，M_2〔函数p在q有上确界〕和M_2〔函数p在q有下确界〕.而且成立

(12,44) $*$〔函数p在q有下界〕$\longleftrightarrow p\in *\Gamma\wedge q\in *\Gamma\wedge M_2$〔函数$p$在$q$有下界〕。

(12,45) $*$〔函数p在q有上确界〕$\longleftrightarrow p\in *\Gamma\wedge q\in *\Gamma\wedge$ M_2〔函数p在q有上确界〕。

(12,46) $*$〔函数p在q有下确界〕$\longleftrightarrow p\in *\Gamma\wedge q\in *\Gamma\wedge$ M_2〔函数p在q有下确界〕.

9.关于函数的极值　函数的最大值，在M可如下定义

(12,47) $m=\max\limits_{x\in q}(p(x))\longleftrightarrow m=\sup\limits_{x\in q}(p(x))\wedge(\exists x)$〔$x\in q\wedge m=p(x)$〕。

由公设(5,2)，转到$*M$则有定义

(12,48) $$m = *\max_{x\in q}(p(x)) \longleftrightarrow m = *\sup_{x\in q}(p(x)) \wedge (\exists x)[x\in q \wedge m = p(x)].$$

在M_2可直接定义

(12,49) $$m = \max_{x\in q}{}_2(p(x)) \longleftrightarrow m = \sup_{p\in q}{}_2(p(x)) \wedge (\exists x)[x\in q \wedge m = (p(x)].$$

由(6,1)可以得到以下关系

(12,50) $$m = *\max_{x\in q}(p(x)) \longleftrightarrow p\in *\Gamma \wedge q\in *\Gamma \wedge m = \max_{x\in q}{}_2(p(x)).$$

关于函数的最小值，在M，$*M$和M_2可类似地定义$m = \min_{x\in q}(p(x))$，$m = *\min_{x\in q}(p(x))$和$m = \min_{x\in q}{}_2(p(x))$。

而且成立关系

(12,51) $$m = *\min_{x\in q}(p(x)) \longleftrightarrow p\in *\Gamma \wedge q\in *\Gamma \wedge m = \min_{x\in q}{}_2(p(x)).$$

10.众所周知，在M有以下定理

(12,52) 函数p在q有上界$\longrightarrow$函数p在q有上确界。

由公设(5,3)，可知在$*M$有以下定理

(12,53) $*$[函数p在q有上界]$\longrightarrow *$[函数p在q有上确界]

但是在M_2中上述定理并不成立，例如

(12,54) $$f(x) = \begin{cases} x, & x\text{是有限数}, \\ o, & x\text{是无限大}. \end{cases}$$

任如一个正无限大的数都是$f(x)$的上界，但$f(x)$没有上确界。

关于下界和下确界，情况也是类似的。

11.关于单调函数 若p_1是R的子集，在M有以下定义

(12,55) p是p_1到R的升函数$\longleftrightarrow p\in It(p_1, R) \wedge (\forall s)(\forall t)$

$[s \in p_1 \wedge t \in p_1 \wedge s < t \longrightarrow p(s) < p(t)]$.

由公设(5,2)，将上式转到$*M$，有以下定义

(12,56) $\quad *[p$是p_1到$*R$的升函数$] \longleftrightarrow p \in *\mathrm{ft}(p_1, *R) \wedge (\forall s)(\forall t)[s \in p_1 \wedge t \in p_1 \wedge s < t \longrightarrow p(s) < p(t)]$.

若p_1是R_2的子集，在M_2可以直接定义

(12,57) $\quad M_2[p$是p_1到R_2的升函数$] \longleftrightarrow p \in \mathrm{ft}_2(p_1, R_2) \wedge (\forall s)(\forall t)[s \in p_1 \wedge t \in p_1 \wedge s < t \longrightarrow p(s) < p(t)]]$.

利用(6,1)可得

(12,58) $\quad *[p$是p_1到$*R$的升函数$\longleftrightarrow p \in *\Gamma \wedge p_1 \in *\Gamma \wedge M_2[p$是$p_1$到$R_2$的升函数$]$.

类似地，在M，$*M$和M_2可以定义$[p$是p_1到R的降 函 数$]$. $*[p$是p_1到$*R$的降函数$]$和$M_2[p$是p_1到R_2的降函数$]$， 而 且成立

(12,59) $\quad *[p$是p_1到$*R$的降函数$] \longleftrightarrow p \in *\Gamma \wedge p_1 \in *\Gamma \wedge M_2[p$是$p_1$到$R_2$的降函数$]$.

若p_1是R的子集，在M有以下定义

(12,60) $\quad p$是p_1到R的非降函数$\longleftrightarrow p \in \mathrm{ft}(p_1, R) \wedge (\forall s)(\forall t)[s \in p_1 \wedge t \in p_1 \wedge s < t \longrightarrow p(s) \leqslant p(t)]$.

由公设(5,2)，将上式转到$*M$，有以下定义

(12,61) $\quad *[p$是p_1到$*R$的非降函数$] \longleftrightarrow p \in *\mathrm{ft}(p_1, *R) \wedge (\forall s)(\forall t)[s \in p_1 \wedge t \in p_1 \wedge s < t \longrightarrow p(s) \leqslant p(t)]$.

在M_2，若p_1是R_2的子集，可直接定义

(12,62) $\quad M_2[p$是p_1到R_2的非降函数$] \longleftrightarrow p \in \mathrm{ft}_2(p_1, R_2) \wedge (\forall s)(\forall t)[s \in p_1 \wedge t \in p_1 \wedge s < t \longrightarrow p(s) \leqslant p(t)]$.

利用(6,1)可得

(12,63)　　$*$〔p是p_1到$*R$的非降函数〕$\longleftrightarrow p\in *\Gamma\wedge p_1\in *\Gamma\wedge M_2$〔$p$是$p_1$到$R_2$的非降函数〕。

类似地，在M，$*M$和M_2可定义〔p是p_1到R的非升函数〕$*$〔p是p_1到$*R$的非升函数〕和M_2〔p是p_1到R_2的非升函数〕，而且成立

(12,64)　　$*$〔p是p_1到$*R$的非升函数〕$\longleftrightarrow p\in *\Gamma\wedge p_1\in *\Gamma\wedge M_2$〔$p$是$p_1$到$R_2$的非升函数〕。

12.在M成立以下定理

(12,65)　　x是N到R的非降函数$\wedge$函数x在N有上界$\longrightarrow$
$\lim\limits_{n\to\infty}x(n)=\sup\limits_{x\in N}(x(n))$。

由公设(5,2)，将上式转到$*M$，有以下定理

(12,66)　　$*$〔x是$*N$到$*R$的非降函数〕$\wedge *$〔函数x在$*N$有上界〕$\longrightarrow *\lim\limits_{n\to *\infty}x(n)=*\sup\limits_{n\in *N}(x(n))$。

此外，在M成立以下定理

(12,67)　　x是N到R的非降函数$\wedge$函数x在N没有上界$\longrightarrow$
$\lim\limits_{n\to\infty}x(n)=+\infty$。

由公设(5,2)，将上式转到$*M$，有以下定理

(12,68)　　$*$〔x是$*N$到$*R$的非降函数〕$\wedge *$〔函数x在$*N$没有上界〕$\longrightarrow *\lim\limits_{n\to *\infty}x(n)=+*\infty$。

根据定义，在M_2可直接证明以下定理

(12,69)　　M_2〔X是N_2到R_2的非降函数〕$\wedge M_2$〔函数x在N_2没有上界〕$\longrightarrow$
$M_2\lim\limits_{n\to\infty_2}x(n)=+\infty_2$。

请注意，M_2的定理(12,69)与$*M$的定理(12,68)是很相似的。

现在问，M_2中是否有个定理与$*M$的(12,66)相似呢？这

个问题比较复杂一些，放在本节的最后讨论。

为此，我们先引进如下的定义。

以2^{*N} 记全体$*N$的子集所组成的集合，称之为$*N$的幂集。令A是N到2^{*N}的函数，即

$$A\in ft_2(N,\ 2^{*N}).$$

又设对每个$i\in N$，由A所给出的$A_i\in 2^{*N}$是非空的$*N$的子集。称A是$*N$的前N分解，如果它满足以下两条性质：

1.对任意的i，$j\in N$且$i<j$和任意$a_i\in A_i$和$a_j\in A_j$成立$a_i<a_j$；

2.如果令$B=\bigcup\limits_{i\in N}A_i$和$F=*N\backslash B$，那么对任意的$b\in B$和$f\in F$成立$b<f$.

我们称B为$*N$的可前N分解的子集，称A是B的N分解.若A是$*N$的前N分解，且$B=*N$，则称A是$*N$的N分解.

可以证明：存在一个A，它是$*N$的N分解。我们先承认这个结论。这时自然有$*N=\bigcup\limits_{i\in N}A_i$.

在上述前提之下，我们构造一个函数$\varphi\in ft_2(*N,\ N)$，它的具体定义如下，对每个$i\in N$

(12,70) $\qquad \varphi(n)=i$，当$n\in A_i$.

不难看出，φ具有以下四条性质：

1.M_2〔φ是N_2到R_2的非降函数〕.

2.M_2〔函数φ在N_2有上界〕，这是因为φ的取值是有限数，因此每个正无限大都是它的上界.

3.$\sup\limits_{n\in N_2}{}_2(\varphi(n))$不存在，这是因为$\varphi$的取值是整个$N$(即$N_1$)它在$N_2$中是没有上确界的.

4.R_2的任意（有限或无限大的）数x都不能使得

$$M_2\lim_{n\to\infty_2}\varphi(n)=x$$

成立。

总结以上四点，可以推得，在M_2中，下述定理：

(12,71)　　M_2〔x是N_2到R_2的非降函数〕$\wedge M_2$〔函数x在N_2有上界〕$\longrightarrow M_2 \lim\limits_{n\to\infty_2} x(n) = \sup\limits_{n\in N_2}{}_2(x(n))$，

是不成立的。

我们现在证明：存在一个$*N$的N分解。为此，我们要用到措恩(Zorn)引理，它的一种陈述如下：

措恩引理：令P是非空的偏序集，而且P的每个直线序子集在P中有上界。那么对于每个$x\in P$，存在极大元$y\in P$满足$x \prec y$。

注意：此处“$\prec$”代表P中的序。关于措恩引理的陈述和使用可参考〔50〕和〔44〕。

我们用反证法证明上述结论。设不存在$*N$的N分解。令$\mathscr{B} = \{B \mid B$为$*N$的可前N分解的子集$\}$。显然，$\mathscr{B}$是非空的，因为$N_1 \in \mathscr{B}$。

下面对$\mathscr{B}$的元素构造偏序关系。

如果C是N到$\mathscr{B}$的任意的一个函数，即$C\in ft_2(N,\mathscr{B})$。那么对每个$i\in N$，存在$C_i\in\mathscr{B}$。设$A^{(i)}$是C_i的N分解，那么$C_i = \bigcup\limits_{j\in N} A_j^{(i)}$，具体写出为

(12,72)
$$
\begin{aligned}
C_1 &= A_1^{(1)} \cup A_2^{(1)} \cup \cdots A_{n-1}^{(1)} \cup A_n^{(1)} \cup A_{n+1}^{(1)} \cup \cdots \\
C_2 &= A_1^{(2)} \cup A_2^{(2)} \cup \cdots A_{n-1}^{(2)} \cup A_n^{(2)} \cup A_{n+1}^{(2)} \cdots \\
&\cdots \quad \cdots, \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
C_{n-1} &= A_1^{(n-1)} \cup A_2^{(n-1)} \cup \cdots A_{n-1}^{(n-1)} \cup A_n^{(n-1)} \\
&\quad \cup A_{n+1}^{(n-1)} \cup \cdots \\
C_n &= A_1^{(n)} \cup A_2^{(n)} \cup \cdots A_{n-1}^{(n)} \cup A_n^{(n)} \cup A_{n+1}^{(n)} \cup \cdots \\
C_{n+1} &= A_1^{(n+1)} \cup A_2^{(n+1)} \cup \cdots A_{n-1}^{(n+1)} \cup A_n^{(n+1)} \\
&\quad \cup A_{n+1}^{(n+1)} \cup \cdots
\end{aligned}
$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

进一步，如果还满足以下关系

(12,73) $\quad A_1^{(i)} = A_1^{(1)},\ i \in N$

$$\begin{cases} A_2^{(i)} = A_2^{(2)}, & i \in N \text{且} 2 \leqslant i \\ \bigcup\limits_{j \in N \text{且} 2 \leqslant j} A_j^{(1)} \sqsubset A_2^{(2)} \end{cases}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\begin{cases} A_n^{(i)} = A_n^{(n)}, & i \in N \text{且} n \leqslant i \\ \bigcup\limits_{j \in N \text{且} n \leqslant j} A_j^{(n-1)} \sqsubset A_n^{(n)} \end{cases}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

我们就规定B的元素C_1，C_2，$\cdots$，C_{n-1}，C_n，C_{n+1}，$\cdots$之间存在直线序关系

(12,74) $\quad C_1 \prec C_2 \prec \cdots C_{n-1} \prec C_n \prec C_{n+1} \prec \cdots$.

这样，$\mathscr{B}$成为一个偏序集。

由反证法所作的假设，不难看出，对任意的$B \in \mathscr{B}$，都存在一个$\tilde{C} \in \mathrm{ft}_2(N, \mathscr{B})$使得按上述意义成立直线序关系

$\tilde{C}_1 \prec \tilde{C}_2 \prec \cdots \tilde{C}_{n-1} \prec \tilde{C}_n \prec \tilde{C}_{n+1} \prec \cdots$而且使得$\tilde{C}_1 = \tilde{B}$

现在我们证明：任意这样的直线序关系在$\mathscr{B}$中有上界。实际上，取C_i的表示式（12，72）的对角线上的集合的并集为B，即

$$B = \bigcup_{n \in N} A_n^{(n)},$$

则$B \in \mathscr{B}$，且按上述偏序关系，对每个C_n，成立

$$C_n \prec B.$$

或者，更确切地说，存在一个新的直线序关系

$$C_1 \prec C_2 \prec \cdots \prec C_n \prec C'_{n+1} \prec C'_{n+2} \prec \cdots$$

恰好使得$C'_{n+1} = B$.所以B就是直线序关系（12，74）的一个上界.

根据措恩引理，$\mathscr{B}$中存在极大元．设B_1是这样的一个极大元．那么B_1是$*N$的可前N分解的子集．根据反证法的假设，$B_1 \neq {}^*N$，即$*N \setminus B_1$是非空的．如上述，以B_1为开始的元素，又可构成直线序关系

$$B_1 \prec B_2 \prec \cdots \prec B_{n-1} \prec B_n \prec B_{n+1} \prec \cdots$$

但这与B_1的极大性质相矛盾．因此存在一个$*N$的N分解．

在M中成立波尔察诺—外尔斯辍斯（Bolzano—weierstrass）定理如下

（12，75）　x_n是有界的不守常的实数序列→从x_n中可抽出不守常的收敛子序列．

我们可以把（12，75）形式化，由公设（5，2）转到$*M$中去．但在M_2中此定理不成立．请注意（12，70），其中的$\varphi(n)$是M_2中有界的不守常的实数序列，但从其中抽不出不守常的收敛子序列．

关于波尔察诺—外尔斯辍斯定理，请参考〔1〕．

§13　柯西序列

柯西序列是数学分析中的重要概念，而且被推广到距离空间中去了．

在标准分析M中，柯西序列是如下定义的

（13，1）　x是N到R的柯西序列$\longleftrightarrow x \in \mathrm{ft}(N, R) \wedge (\forall \varepsilon)[\varepsilon > 0 \rightarrow (\exists t)[t \ni N \wedge (\forall s_1)(\forall s_2)[s_1 \in N \wedge s_2 \in N \wedge t \leqslant s_1 \wedge t \leqslant s_2 \rightarrow |x(s_1) - x(s_2)| < \varepsilon]]]$．

由公设（5，2），将上式转到$*M$有以下定义

（13，2）　$*[x$是$*N$到$*R$的柯西序列$] \longleftrightarrow x \in *\mathrm{ft}(*N, *R) \wedge (\forall \varepsilon)[\varepsilon > 0 \rightarrow (\exists t)[t \in *N \wedge (\forall s_1)(\forall s_2)[s_1 \in *N \wedge s_2 \in *N \wedge t \leqslant s_1 \wedge t \leqslant s_2 \longrightarrow |x(s_1) - x(s_2)| < \varepsilon]]]$．

在M_2可直接定义

(13, 3) M_2〔x是N_2到R_2的柯西序列〕 $\longleftrightarrow x \in \mathrm{ft}_2(N_2, R_2) \wedge (\forall \varepsilon)[\varepsilon > 0 \rightarrow (\exists t)[t \in N_2 \wedge (\forall s_1)(\forall s_2)[s_1 \in N_2 \wedge s_2 \in N_2 \wedge t \leqslant s_1 \wedge t \leqslant s_2 \longrightarrow |x(s_1) - x(s_2)| < \varepsilon]]]$。

由(6, 1)可以看出

(13, 4) $*$〔x是$*N$到$*R$的柯西序列〕$\longleftrightarrow x \in *\Gamma \wedge M_2$〔$x$是$N_2$到$R_2$的柯西序列〕。

在M成立以下定理

(13, 5) $x \in \mathrm{ft}(N, R) \wedge (\exists p)[\lim\limits_{x \to \infty} x(n) = p] \longleftrightarrow x$是$N$到$R$的柯西序列。

由公设(5, 2),将上式转到$*M$,有以下定理

(13, 6) $x \in *\mathrm{ft}(*N, *R) \wedge (\exists p)[*\lim\limits_{x \to *\infty} x(n) = p] \longleftrightarrow *$〔$x$是$*N$到$*R$的柯西序列〕。

在M_2中情况比较复杂。若A是$*N$的N分解,则成立

$$*N = \bigcup_{i \in M} A_i.$$

现在对每个$i \in N$,任取$\varphi_i \in A_i$,则定义了一个函数$\varphi \in \mathrm{ft}_2(N, N_2)$,对每个$i \in N$,取值$\varphi_i \in N_2$。我们证明,对于这样的函数,成立以下定理:

(13, 7) $(\forall n)[n \in N_2 \rightarrow (\exists i)[i \in N \wedge (\forall j)[j \in N \wedge i < j \rightarrow n \leqslant \varphi_j]]]$。

证明。我们用反证法。若(13, 7)不成立,则成立以下语句

(13, 8) $(\exists n)[n \in N_2 \wedge (\forall i)[i \in N \wedge (\exists j)[j \in N \wedge i < j \wedge \varphi_j < n]]]$。

这就是说,$*N$中存在一个$n \notin \bigcup\limits_{i \in N} A_i$,这与$A$是$*N$的$N$分解相矛盾。因此(13, 7)得证。

与（13，7）相等价，我们有以下定理

(13，9)　$(\forall n)[n\in N_2\longrightarrow(\exists i)[i\in N\wedge(\forall j)[j\in N\wedge i<j\longrightarrow\frac{1}{\varphi_j}<\frac{1}{n}]]]$.

现在，我们在M_2中证明以下定理：

(13,10)　M_2[x是N_2到R_2的柯西序列] $\longleftrightarrow x\in ft_2(N_2,R_2)\wedge M_2$[存在一个预备数

$$r=\bigsqcup_{n\in N2}(p(n),\ q(n))$$

和一个$n_1\in N_2$，只要$n_1\leqslant n$，便有$p(n)\leqslant x(n)\leqslant q(n)$].

证明：充分性（$\longleftarrow$）是显然的，读者只要回忆一下(7，38）关于预备数的定义就可以了。

以下只证明必要性（$\longrightarrow$）。设A是一个$*N$的N分解，那么

$$N_2=*N=\bigsqcup_{i\in N}A_i.$$

对任意的$i\in N$，取$m_i\in A_i$，又令$\varepsilon_i=\frac{1}{m_i}$。由$M_2$中柯西序列的定义，对此$\varepsilon_i>0$，存在$t_i\in N_2$（不妨一般性，设$t_{i_1}<t_{i_2}$，如果$i_1<i_2$），对任意$s\in N_2$，只要$t_i\leqslant s$，便成立

(13,11)　$|x(t_i)-x(s)|<\frac{1}{m_i},\ i\in N$.

由此得到

(13,12)　$x(t_i)-\frac{1}{m_i}<x(s)<x(t_i)+\frac{1}{m_i}$其中$i\in N$和$t_i\leqslant s$.

现在对任意$i\in N$和$t_i\leqslant s<t_{i+1}$，定义

(13,13)
$$\begin{cases}x'(s)=\max\left\{x(t_1)-\frac{1}{m_1},\cdots,\ x(t_i)-\frac{1}{m_i}\right\}\\ x''(s)=\min\left\{x(t_1)+\frac{1}{m_1},\ \cdots,\ x(t_i)+\frac{1}{m_i}\right\}.\end{cases}$$

那么$x'(s)$是N_2到R_2的非降函数，$x''(s)$是N_2到R_2的非升函数，并且满足

(13,14) $x'(s)<x(s)<x''(s)$，当$t_1\leqslant s$。

又当$t_i\leqslant s<t_{i+1}$成立

(13,15) $|x''(s)-x'(s)|\leqslant\frac{2}{m_i}$.

所以在M_2成立

(13,16) $M_2\lim\limits_{s\to\infty_2}(x''(s)-x'(s))=0$.

进一步不难证明，存在$p(n)$和$q(n)$，$p(n)$是N_2到Q_2的升函数，$q(n)$是N_2到Q_2的降函数，又满足

(13,17) $M_2\lim\limits_{n\to\infty_2}q(n)-p(n)=0$，

和当$t_1\leqslant s$时成立

(13,18) $p(s)\leqslant x'(s)<x(s)<x''(s)\leqslant q(s)$.

最后，在M_2中令预备数

$$r=\bigcup_{i\in N_2}(p(n),\ q(n)),$$

这个r即为所求。定理（13，10）证完。

§14 开集和闭集

若p是实数集合，x是实数，在M有以下定义

(14，1) x是p的内点$\longleftrightarrow(\exists\delta)[\delta>0\wedge(\forall y)[x-\delta<y<x+\delta\longrightarrow y\in p]]$.

由公设（5，2），将上式转到$*M$，若p是$*R$的子集，$x\in *R$，我们有以下定义

(14，2) $*[x$是p的内点$]\longleftrightarrow(\exists\delta)[\delta>0\wedge(\forall y)[x-\delta<y<x+\delta\longrightarrow y\in p]]$.

在M_2，若p是R_2的子集，$x\in R_2$，我们可直接定义

(14, 3)　　M_2〔x是p的内点〕$\longleftrightarrow$$(\exists\delta)$〔$\delta>0\wedge(\forall y)$〔$x-\delta<y<x+\delta\longrightarrow y\in p$〕〕.

利用（6，1）可以看出，在M_2成立以下关系

(14, 4)　　$*$〔x是p的内点〕$\longleftrightarrow p\in *\Gamma\wedge M_2$〔$x$是$p$的内点〕.

用类似的方法，在M，$*M$和M_2分别定义〔x是p的边界点〕，$*$〔x是p的边界点〕和M_2〔x是p的边界点〕，并可看出成立以下关系

(14, 5)　　$*$〔x是p的边界点〕$\longleftrightarrow p\in *\Gamma\wedge M_2$〔$x$是$p$的边界点〕.

若p是实数集合，在M有以下定义

(14, 6)　　p是开集$\longleftrightarrow(\forall x)$〔$x\in p\longrightarrow x$是$p$的内点〕.

由公设（5，2），将上式转到$*M$，若p是$*R$的子集，我们有以下定义

(14, 7)　　$*$〔p是开集〕$\longleftrightarrow$ $(\forall x)$〔$x\in p\longrightarrow x$是p的内点〕.

在M_2，若p是R_2的子集，可直接定义

(14, 8)　　M_2〔p是开集〕$\longleftrightarrow(\forall x)$〔$x\in p\longrightarrow M_2$〔$x$是$p$的内点〕〕.

利用（6，1）可得

(14, 9)　　$*$〔p是开集〕$\longleftrightarrow p\in *\Gamma\wedge M_2$〔$p$是开集〕.

用类似的方法，把闭集看成是开集的余集，在M，$*M$和M_2可分别定义〔p是闭集〕，$*$〔p是闭集〕和M_2〔p是闭集〕，而且成立以下关系

(14,10)　　$*$〔p是闭集〕$\longleftrightarrow p\in *\Gamma\wedge M_2$〔$p$是闭集〕.

请注意，R是单连通的，在$*M$中$*R$也是单连通的．但在M_2中，R_2是多连通的．例如，R_2中所有限数所组成的集合既是开集又是闭集，R_2的所有无限小所组成的集合既是开集又

是闭集，R_2的所有无限大所组成的集合既是开集又是闭集，等等。

在M中，每个哥西序列收敛到R的一个点，在$*M$中每个哥西序列收敛到$*R$的一个点。但在M_2中每个哥西序列是否收敛到R_2的一个点，作者尚不清楚。作者所知道的只是（13，10），也就是在某种意义上收敛到M_2的一个预备数。

同样，在M中，每个闭集都含有其哥西序列的极限点，在$*M$也如此。但在M_2中，每个闭集是否含有其哥西序列的极限点，作者不清楚。

但在M中，若p是实数集，有以下定理

(14，11)　p是闭集$\longleftrightarrow(\forall x)[x\in \mathrm{ft}(N,p)\wedge$

$$(\exists q)[\lim_{n\to\infty}x(n)=q]\longrightarrow \lim_{n\to\infty}x(n)\in p].$$

由公设（5，2），将上式转到$*M$，若p是$*R$的子集，我们有以下定理

(14，12)　$*[p\text{是闭集}]\longleftrightarrow(\forall x)[x\in *\mathrm{ft}(*N,p)\wedge$

$$(\exists q)[*\lim_{n\to *\infty}x(n)=q]\longrightarrow *\lim_{n\to *\infty}x(n)\in p].$$

很巧，在M_2若p是R_2的子集，我们有以下定理

(14，13)　$M_2[p\text{ 是闭集}]\longleftrightarrow(\forall x)[x\in \mathrm{ft}(N_2,\ p)\wedge$

$$(\exists q)[M_2\lim_{n\to\infty_2}x(n)=q]\longrightarrow M_2\lim_{n\to\infty_2}x(n)\in p].$$

今将（14，13）证明如下。

首先证明必要性（$\longrightarrow$）。设$M_2[p\text{是闭集}]$，则成立$M_2[R_2\backslash p\text{ 是开集}]$。今任取一点$x\in R_2\backslash p$，由于后者是开集，故存在$\delta>0$，对任意的$y\in(x-\delta,\ x+\delta)$成立$y\in R_2\backslash p$，即$y\notin p$。

进一步，设x是$\mathrm{ft}_2(N_2,\ p)$的任意元素，那么对任意的$n\in N_2$，成立$x(n)\in p$。又设存在$q\in R_2$使得$M_2\lim\limits_{n\to\infty_2}x(n)=q$，

现在证明：$q\in p$.

用反证法.若$q\notin p$，则$q\in R_2\backslash p$，则存在$\delta>0$，使得对任意$y\in(q-\delta, q+\delta)$成立$y\notin p$.另一方面，由于$M_2\lim\limits_{n\to\infty_2}x(n)=q$，那么对此$\delta>0$存在$n_0\in N_2$，对任何$n$，只要$n_0<n$，成立$x(n)\in(q-\delta, q+\delta)$.因此，$x(n)\notin p$.从而导致矛盾，因此$q\in p$.必要性证完.

现在证明充分性（$\Longleftarrow$）.设由$x\in \mathrm{ft}_2(N_2, p$和存在$q\in R_2$使得$M_2\lim\limits_{n\to\infty_2}x(n)=q$，可以推得$q\in p$.我们将证明$p$是闭集，即$R_2\backslash p$是开集.

用反证法.如果$R_2\backslash p$不是开集，则存在$a\in R_2\backslash p$，即$a\notin p$，且a不是$R_2\backslash p$的内点.那么对任何$\delta>0$，都存在$y\in R_2$，使得$y\in(a-\delta, a+\delta)$且$y\notin R_2\backslash p$，即$y\in p$.

现在令A是$*N$的N分解，即$*N=\bigcup\limits_{i\in N}A_i$.对每个$i\in N$，取$m_i\in A_i$.

首先取$\delta_1=m_1^{-1}$，则存在$y_1\in R_2$，使得$y_1\in(a-\delta_1, a+\delta_1)$且$y_1\in p$.

现在对每个$n\in N$，我们构造如下的命题p_n：存在$i_1, i_2, \cdots, i_n\in N$，$\delta_1=m_{i_1}^{-1}$，$\delta_2=m_{i_2}^{-1}$，$\cdots$，$\delta_n=m_{i_n}^{-1}$，又存在$y_1, y_2, \cdots, y_n\in p$使得

$$y_1\in(a-\delta_1, a+\delta_1),\qquad y_1\notin(a-\delta_2, a+\delta_2),$$
$$y_2\in(a-\delta_2, a+\delta_2),\qquad y_2\notin(a-\delta_3, a+\delta_3),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$y_{n-1}\in(a-\delta_{n-1}, a+\delta_{n-1}),\ y_{n-1}\notin(a-\delta_n, a+\delta_n),\ y_n\in(a-\delta_n, a+\delta_n).$$

那么P_1显然成立.下面由R_n推导P_{n+1}.

设P_n成立.由$*N$的N分解A的性质，推得存在$m_{i_{n+1}}$使得

$$|y_n - a| > m_{i_{n+1}}^{-1} = \delta_{n+1},$$

即成立 $y_n \notin (a-\delta_{n+1}, a+\delta_{n+1})$。对此$\delta_{n+1}$，由于$a$不是$R_2 \backslash p$的内点，推得存在 $y_{n+1} \in p$ 且$y_{n+1} \in (a-\delta_{n+1}, a+\delta_{n+1})$。于是我们推得了$P_{n+1}$成立。

因此，由M_2中关于命题的有限归纳法（8，12），我们知道对任何$i \in N$，P_i为真。

于是我们得到了一个函数$y \in \mathrm{ft}_2(N, p)$，其具体定义为$y(n) = y_n$，$n \in N$，$y_n$如上面所定义。

进一步，我们构造一个函数$\varphi \in \mathrm{ft}_2(N_2, p)$，其具体定义为

$\varphi(n) = y_i$，当$n \in A_i$，$i \in N$。并且不难看出$M_2 \lim\limits_{n \to \infty_2} \varphi(n) = a$。因此又推得$a \in p$。从而得到矛盾。充分性证完。

定理（14，13）证完。

若p是实数集，x是实数，在M有以下定义

(14,14) x是p的聚点$\longleftrightarrow (\forall \delta)[\delta > 0 \longrightarrow (\exists y)[y \neq x \wedge y \in p \wedge x - \delta < y < x + \delta]]$，

(14,15) ∞是p的聚点$\longleftrightarrow (\forall m)[m > 0 \longrightarrow (\exists y)[y \in p \wedge m < |y|]]$。

由公设（5，2），将以上二式转到$*M$，若p是$*R$的子集，$x \in *R$，我们有以下定义

(14,16) $*[x$是p的聚点$] \longleftrightarrow (\forall \delta)[\delta > 0 \longrightarrow (\exists y)[y \neq x \wedge y \in p \wedge x - \delta < y < x + \delta]]$，

(14,17) $*[*\infty$是p的聚点$] \longleftrightarrow (\forall m)[m > 0 \longrightarrow (\exists y)[y \in p \wedge m < |y|]]$。

在M_2，若p是R_2的子集，$x \in R_2$，我们可以直接定义

(14,18) $M_2[x$是p的聚点$] \longleftrightarrow (\forall \delta)[\delta > 0 \longrightarrow (\exists y)[y \neq x \wedge y \in p \wedge x - \delta < y < x + \delta]]$，

(14,19)　M_2〔∞_2是p的聚点〕$\longleftrightarrow(\forall m)$〔$m>0\longrightarrow(\exists y)$〔$y\in p\wedge m<|y|$〕〕.

利用（6，1）可以得到

(14,20)　$*$〔x是p的聚点〕$\longleftrightarrow p\in *\Gamma\wedge M_2$〔$x$是$p$的聚点〕,

(14,21)　$*$〔$*\infty$是p的聚点〕$\longleftrightarrow p\in *\Gamma\wedge M_2$〔$\infty_2$是$p$的聚点〕.

类似地，在M，$*M$和M_2还可以定义〔$+\infty$是p的聚点〕，〔$-\infty$是p的聚点〕，〔x_+是p的聚点〕，〔x_-是p的聚点〕，$*$〔$+*\infty$是p的聚点〕，$*$〔$-*\infty$是p的聚点〕，$*$〔x_+是p的聚点〕，$*$〔x_-是p的聚点〕，M_2〔$+\infty_2$是p的聚点〕，M_2〔$-\infty_2$是p的聚点〕，M_2〔x_+是p的聚点〕和M_2〔x_-是p的聚点〕，这里x_+代表x的正方向，x_-代表x的负方向.进一步，利用（6，1）还可以求得与（4，20）和（4，21）相类似的等价关系.

在§12，§13和§14中我们在M，$*M$和M_2中分别讨论了一些最基本的分析概点，为以后研究极限和连续性准备了条件.

§15　函数的极限

在以上几节的基础上，我们进一步研究极限概念。设q是实数集，y是q的聚点，$p\in \mathrm{ft}(q,R)$和$s\in R$，在M中极限的定义如下

(15，1)　$\lim\limits_{x\to y}p(x)=s\longleftrightarrow(\forall\varepsilon)$〔$\varepsilon>0\to(\exists\delta)$〔$\delta>0\wedge(\forall x)$〔$x\in q\wedge|x-y|<\delta\to|p(x)-s|<\varepsilon$〕〕〕.

由公设(5,2)，将上式转到$*M$，若q是$*R$的子集，$*$〔y是q的聚点〕,$p\in *\mathrm{ft}(q,*R)$和$s\in *R$，我们定义极限如下

(15，2)　$*\lim\limits_{x\to y}P(x)=s\longleftrightarrow(\forall\varepsilon)$〔$\varepsilon>0\to(\exists\delta)$〔$\delta>0\wedge(\forall x)$〔$x\in q\wedge|x-y|<\delta\to|p(x)-s|<\varepsilon$〕〕〕.

在M_2若q是R_2的子集，M_2〔y是q的聚点〕，$p\in \mathrm{ft}_2(q,R_2)$和$s\in R_2$，我们可直接引入定义如下：

(15，3)　　$M_2\lim_{x\to y} p(x)=s\longleftrightarrow(\forall\varepsilon)[\varepsilon>0\to(\exists\delta)[\delta>0 \wedge(\forall x)[x\in q\wedge|x-y|<\delta\to|p(x)-s|<\varepsilon]]]$。

利用(6,1)，我们可以推得在M_2成立以下公式

(15，4)　　$*$〔y是q的聚点〕$\wedge s\in *R\wedge p\in *\mathrm{ft}(q,*R)\wedge *\lim_{x\to y} p(x)=s\longleftrightarrow p\in *\Gamma\wedge q\in *\Gamma\wedge M_2$〔$y$是$q$的聚点〕$\wedge s\in R_2\wedge p\in \mathrm{ft}_2(q, R_2)\wedge M_2\lim_{x\to y} p(x)=s$。

关于单方极限，在M若y_+是q的聚点，$p\in ft(q,R)$和$s\in R$，我们有以下定义

(15，5)　　$\lim_{x\to y+} p(x)=s\longleftrightarrow(\forall\varepsilon)[\varepsilon>0\to(\exists\delta)[\delta>0\wedge(\forall x)[x\in q\wedge y<x\wedge|x-y|<\delta\to|p(x)-s|<\varepsilon]]]$。

由公设(5,2)，将上式转到$*M$，若$*$〔y_+是q的聚点〕，$p\in *\mathrm{ft}(q,*R)$，关于单方极限，我们有以下定义：

(15，6)　　$*\lim_{x\to y+} p(x)=s\longleftrightarrow(\forall\varepsilon)[\varepsilon>0\to(\exists\delta)[\delta>0\wedge(\forall x)[x\in q\wedge y<x\wedge|x-y|<\delta\to|p(x)-s|<\varepsilon]]]$。

在M_2，若M_2〔y_+是q的聚点〕，$p\in \mathrm{ft}_2(q,R_2)$和$s\in R_2$，关于单方极限，我们可以如下引入定义：

(15，7)　　$M_2\lim_{x\to y+} p(x)=s\longleftrightarrow(\forall\varepsilon)[\varepsilon>0\to(\exists\delta)[\delta>0\wedge(\forall x)[x\in q\wedge y<x\wedge|x-y|<\delta\to|p(x)-s|<\varepsilon]]]$。

利用(6,1)可以证明以下等价关系：

(15，8)　　$*$〔y_+是q的聚点〕$\wedge s\in *R\wedge p\in *\mathrm{ft}(q,*R)$

$\wedge {}^*\lim_{x\to y+} p(x) = s \longleftrightarrow p \in {}^*\Gamma \wedge q \in {}^*\Gamma \wedge M_2$〔$y_+$ 是q的聚点〕$\wedge s \in R_2 \wedge p \in \mathrm{ft}_2(q, R_2) \wedge M_2 \lim_{x\to y+} p(x) = s$

关于以正无穷为极限的情况，在M若y是q的聚点，$p \in \mathrm{ft}(q, R)$，我们有以下定义：

(15, 9) $\lim_{x\to y} p(x) = +\infty \longleftrightarrow (\forall t)[t > 0 \rightarrow (\exists \delta)[\delta > 0 \wedge (\forall x)[x \in q \wedge |x - y| < \delta \rightarrow t < p(x)]]]$.

由公设(5,2)，将上式转到$^*M$，若*〔y是q的聚点〕和$p \in {}^*\mathrm{ft}(q, {}^*R)$，关于以正无穷为极限的情况，我们有以下定义

(15,10) $^*\lim_{x\to y} p(x) = +{}^*\infty \longleftrightarrow (\forall t)[t > 0 \rightarrow (\exists \delta)[\delta > 0 \wedge (\forall x)[x \in q \wedge |x - y| < \delta \rightarrow t < p(x)]]]$.

在M_2，若M_2〔y是q的聚点〕和$p \in \mathrm{ft}_2(q, R_2)$，以正无穷为极限的情况，可以如下定义：

(15,11) $M_2 \lim_{x\to y} p(x) = +\infty_2 \longleftrightarrow (\forall t)[t > 0 \rightarrow (\exists \delta)[\delta > 0 \wedge (\forall x)[x \in q \wedge |x - y| < \delta \rightarrow t < p(x)]]]$.

利用(6,1)，可以证明以下等价关系

(15,12) *〔y是q的聚点〕$\wedge p \in {}^*\mathrm{ft}(q, {}^*R) \wedge {}^*\lim_{x\to y} p(x) = +{}^*\infty \longleftrightarrow p \in {}^*\Gamma \wedge q \in {}^*\Gamma \wedge M_2$〔$y$是$q$的聚点〕$\wedge p \in \mathrm{ft}_2(q, R_2) \wedge M_2 \lim_{x\to y} p(x) = +\infty_2$.

关于自变量趋于正无穷的极限，在M，若$p \in \mathrm{ft}(q, R)$，$+\infty$是q的聚点和$s \in R$，我们有以下定义：

(15,13) $\lim_{x\to+\infty} p(x) = s \longleftrightarrow (\forall \varepsilon)[\varepsilon > 0 \rightarrow (\exists t)[t > 0 \wedge (\forall x)[x \in q \wedge t < x \rightarrow |p(x) - s| < \varepsilon]]]$.

由公设(5,2)，将上式转到$^*M$，若$p \in {}^*\mathrm{ft}(q, {}^*R)$，*〔$+{}^*\infty$是$q$的聚点〕和$s \in {}^*R$，关于自变量趋于正无穷的极限，有以下定

义

(15,14) $\quad {}^*\lim_{x\to +{}^*\infty} p(x)=s \longleftrightarrow (\forall \varepsilon)[\varepsilon>0\to(\exists t)[t>0\wedge (\forall x)[x\in q\wedge t<x\to |p(x)-s|<\varepsilon]]]$,

在M_2，若$p\in \mathrm{ft}_2(q,R_2)$，$M_2$[$+\infty_2$是$q$的聚点]和$s\in R_2$，关于自变量趋于正无穷的极限，我们可以直接定义如下：

(15,15) $\quad M_2\lim_{x\to\infty_2} p(x)=s \longleftrightarrow (\forall \varepsilon)[\varepsilon>0\to(\exists t)[t>0\wedge (\forall x)[x\in q\wedge t<x\to |p(x)-s|<\varepsilon]]]$.

利用(6,1)，可得以下等价关系

(15,16) $\quad {}^*$[$+{}^*\infty$是q的聚点]$\wedge s\in {}^*R\wedge p\in {}^*\mathrm{ft}(q,{}^*R)$ $\wedge {}^*\lim_{x\to +{}^*\infty} p(x)=s \longleftrightarrow p\in {}^*\Gamma\wedge q\in {}^*\Gamma\wedge M_2$[$+\infty_2$是$q$的聚点]$\wedge s\in R_2\wedge p\in \mathrm{ft}_2(q,R_2)\wedge M_2\lim_{x\to\infty_2} p(x)=s$.

类似地，在M，${}^*M$和M_2可引入以下定义。在M有

(15,17) 负方向的单方极限

$\lim_{x\to y_-} p(x)=s$;

以负无穷大为极限

$\lim_{x\to y} p(x)=-\infty$;

以无穷大为极限

$\lim_{x\to y} p(x)=\infty$;

单方的以无穷大为极限

$$\lim_{x\to \left\{\begin{smallmatrix} y_+ \\ y_- \end{smallmatrix}\right.} p(x)=\begin{cases} +\infty \\ \infty \\ -\infty, \end{cases}$$

自变量趋于负无穷大的极限

$$\lim_{x\to-\infty} p(x)=s;$$

自变量和函数值都趋于无穷大的极限

$$\lim_{x\to\begin{cases}+\infty\\-\infty\end{cases}} p(x)=\begin{cases}+\infty\\-\infty\\\infty\end{cases}$$

由公设(5,2)，将上式转到$*M$，则有以下极限

(15,18) $$*\lim_{x\to y_-} p(x)=s;\ *\lim_{x\to y} p(x)=-*\infty;$$

$$*\lim_{x\to y} p(x)=*\infty;\ *\lim_{x\to-*\infty} p(x)=s;$$

$$*\lim_{x\to\begin{cases}y_+\\y_-\end{cases}} p(x)=\begin{cases}+*\infty\\ *\infty\\ -*\infty\end{cases};$$

$$*\lim_{x\to\begin{cases}+*\infty\\-*\infty\end{cases}} p(x)=\begin{cases}+*\infty\\ *\infty\\ -*\infty\end{cases}$$

在M_2则可以直接定义

(15,19) $$M_2\lim_{x\to y-} p(x)=s;\ M_2\lim_{x\to y} p(x)=-\infty_2;$$

$$M_2\lim_{x\to y} p(x)=\infty_2;\ M_2\lim_{x\to-\infty_2} p(x)=s;$$

$$M_2\lim_{x\to\begin{cases}y_+\\y_-\end{cases}} p(x)=\begin{cases}+\infty_2\\ \infty_2\\ -\infty_2;\end{cases}$$

$$M_2\lim_{x\to\begin{cases}+\infty_2\\-\infty_2\end{cases}} p(x)=\begin{cases}+\infty_2\\ \infty_2\\ -\infty_2.\end{cases}$$

利用(6,1)还可以求得$*M$与M_2中相应于这些极限之间的等价关系。这里就不一一仔细解释了。

为了今后的讨论，还需补充一点。在§9中我们讨论了九种区间，如果我们把区间的含义局限在这九种区间，那么在M，$*M$和M_2分别有语句：p是区间，$*$〔p是区间〕和M_2〔p是区间〕，而且不难看出以下等价关系

(15,20)　　$*$〔p是区间〕$\longleftrightarrow M_2$〔p是区间〕

有时，为了简便，在M，$*M$和M_2中都写成"p是区间"，读者可根据上下文判断p在M，$*M$和M_2的哪一个之中。

关于函数的极限运算，我们有以下简单的法则。在M是

(15,21)
$$\lim_{x\to y} p(x)=s\wedge\lim_{x\to y} q(x)=r\to$$
$$\lim_{x\to y}(p(x)\pm q(x))=s\pm r\wedge\lim_{x\to y} p(x)\cdot q(x))=s\cdot r$$
$$\wedge[r\neq 0\wedge q(x)\neq 0\to\lim_{x\to y}\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{s}{r}].$$

由公设(5,2)，将上式转到$*M$则成立

(15,22)
$$*\lim_{x\to y} p(x)=s\wedge *\lim_{x\to y} q(x)=r$$
$$\to *\lim_{x\to y}(p(x)\pm q(x))=s\pm r\wedge$$
$$*\lim_{x\to y}(p(x)\cdot q(x)=s\cdot r\wedge[r\neq 0\wedge q(x)\neq 0\to$$
$$*\lim_{x\to y}\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{s}{r}].$$

很巧，在M_2也有类似的结论：

(15,13)
$$M_2\lim_{x\to y} p(x)=s\wedge M_2\lim_{x\to y} q(x)=r\to M_2\lim_{x\to y}$$
$$(p(x)\pm q(x))=s\pm r\wedge M_2\lim_{x\to y}(p(x)\cdot q(x))$$
$$=s\cdot r\wedge[r\neq 0\wedge q(x)\neq 0\to M_2\lim_{x\to y}\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{s}{r}].$$

在本节的最后，我们研究一下反函数的概念。

在M，若p_1和p_2是R的子集，又$p \in \mathrm{ft}(p_1, p_2)$，我们定义

(15,14)　　p有p_2到p_1的反函数$\longleftrightarrow (\forall x)[x \in p_2 \to (\exists y)[y \in p_1 \wedge x = p(y) \wedge (\forall z)[z \in p_1 \wedge x = p(z) \to z = y]]]$.

若p有p_2到p_1的反函数，我们进一步定义

(15,15)　　q是p_2到p_1的p的反函数$\longleftrightarrow q \in \mathrm{ft}(p_2, p_1) \wedge (\forall x)(\forall y)[x \in p_1 > y \in p_2 \to [y = p(x) \longleftrightarrow x = q(y)]]$.

由公设(5,2)，将上面二式转到$*M$，若p_1和p_2是$*R$的子集，$p \in *\mathrm{ft}(p_1, p_2)$，有以下定义

(15,16)　　$*$[p有p_2到p_1的反函数]$\longleftrightarrow (\forall x)[x \in p_2 \to (\exists y)[y \in p_1 \wedge x = p(y) \wedge (\forall z)[z \in p_1 \wedge x = p(z) \to z = y]]]$.

若$*$[p有p_2到p_1的反函数]，则有定义

(15,17)　　$*$[q是p_2到p_1的q的反函数]$\longleftrightarrow q \in *\mathrm{ft}(p_2, p_1) \wedge (\forall x)(\forall y)[x \in p_1 \wedge y \in p_2 \to [y = p(x) \longleftrightarrow x = q(y)]]$.

在M_2，若p_1和p_2是p_2的子集，$p \subset \mathrm{f}t_2(p_1, p_2)$，我们可以直接定义

(15,18)　　M_2[p有p_2到p_1的反函数]$\longleftrightarrow (\forall x)[x \in p_2 \to (\exists y)[y \in p_1 \wedge x = p(y) \wedge (\forall z)[z \in p_1 \wedge x = p(z) \to z = y]]]$.

若M_2[p有p_2到p_1的反函数]，我们进一步定义

(15,19)　　M_2[q是p_2到p_1的p的反函数]$\longleftrightarrow q \in \mathrm{ft}_2(p_2, p_1) \wedge (\forall x)(\forall y)[x \in p_1 \wedge y \in p_2 \to [y = p(x) \longleftrightarrow x = q(y)]]$.

利用(6,1)可得

(15,20)　　$*$[p有p_2到p_1的反函数]$\longleftrightarrow p \in *\Gamma \wedge p_1 \in *\Gamma$

$\wedge p_2 \in {*\Gamma} \wedge M_2$〔$p$有$p_2$到$p_1$的对函数〕和

(15,21)　　$*$〔p有p_2到p_1的反函数〕$\wedge *$〔q是 p_2到p_1的p 的 反函数〕$\longleftrightarrow p \in {*\Gamma} \wedge p_1 \in {*\Gamma} \wedge p_2 \in {*\Gamma} \wedge M_2$〔$p$有$p_2$到$p_1$的反函数〕$\wedge M_2$〔$q$是$p_2$到$p_1$的$p$的反函数〕.

§16　标准函数在标准点上的极限

我们知道，M中的任何一个函数，通过$*$——映射，在 $*R$中就是一个标准函数。又R中的任何一个数，通过$*$——映射，在$*R$中就是一个标准数或标准点。

本节研究的是标准函数在标准点上的极限，在M_2中来看，这种极限过程等价于一种无限小说法。鲁滨逊就是利用这种等价性，把标准分析中的极限概念换成了无限小概念，从而在无限小的基础上建立起全部微积分理论。

现在，在无限小的基础上重建微积分的著作已经很多了，本书不打算再做这种工作。本节的中心是论述这种等价性，因为它的确是一个十分重要的和根本性的结果。发现这个等价性的确是鲁滨逊的重大贡献。

首先我们定义非标准数的标准部分。在M_2，若$x \in R$和r是有限数，我们定义

(16, 1)　　$x \in \mathrm{st}(r) \longleftrightarrow r \in \mathrm{mon}(*x)$.

这里$*x$表示通过$*$——映射，x所对应的$*R$中的标准数。我们称x是r的标准部分。

这样，定理(8,13)又可表为

(16, 2)　　$(\forall r)$〔r是有限数$\rightarrow (\exists x)$〔$x \in R \wedge x = \mathrm{st}(r)$〕〕.

1.我们在M_2证明以下定理

(16, 3)　　若a是b到R的非降函数，σ_+是b的聚点，$\sigma = \inf(b)$且$\lim\limits_{x \to \sigma+} a(x) = g$，那么对任何$y \in *b$且满

足$*\sigma<y$和$(y-*\sigma)\in \text{mon}(o)$，成立$(*a(y)-*g)\in \text{mon}(0)$.

证明如下．首先由a是b到R的非降函数，σ_+是b的聚点，$\sigma=\inf(b)$和$\lim\limits_{x\to\sigma+}a(x)=g$可以推得$g=\inf\limits_{x\in b}(a(x))$和

(16, 4) $(\forall\varepsilon)[\varepsilon>0\to(\exists\delta)[\delta>0\wedge(\forall x)[x\in b\wedge\sigma<x<\sigma+\delta\to(a(x)-g)<\varepsilon]]]$.

由公设(5,2)，通过$*$——映射，把定理(16,3)中的假设转到$*M$，我们有：$*[*a$是$*b$到$*R$的非降函数$]$，$*[*\sigma_+$是$*b$的聚点$]$，$*\sigma=*\inf(*b)$和$*\lim\limits_{x\to*\sigma+}*a(x)=*g$。

由此推得$*g=*\inf\limits_{x\in*b}(*a(x))$和

(16, 5) $(\forall\varepsilon)[\varepsilon>0\to(\exists\delta)[\delta>0\wedge(\forall x)[x\in*b\wedge*\sigma<x<*\sigma+\delta\to(*a(x)-*g)<\varepsilon]]]$.

请注意，我们可以把(16,4)看作是M_2中的句子。为了明确，请注意R_1是R_2的子集且R_1与R同构。这时将(16,4)更明确地表为M_2中的句子，我们有

(16, 6) $(\forall\varepsilon)[\varepsilon\in R_1\wedge\varepsilon>0\to(\exists\delta)[\delta\in R_1\wedge\delta>0\wedge(\forall x)[x\in R_1\wedge x\in*b\wedge*\sigma<x<*\sigma+\delta\to(*a(x)-*g)<\varepsilon]]]$.

(16,6)的意义是：对任意给定的$\varepsilon\in R_1$且$\varepsilon>0$，存在$\delta\in R_1$且$\delta>0$并且对任意的$x\in R_1$如果满足$x\in*b$和$*\sigma<x<*\sigma+\delta$都成立$(*a(x)-*g)<\varepsilon$.

然后任意取$y\in*R$且$y\in*b$且$*\sigma<y$和$(y-*\sigma)\in \text{mon}(o)$，那么有

(16, 7) $y-*\sigma<x-*\sigma$.

因此推得

(16, 8) $y<x$.

由于$*[*a$是$*b$到$*R$的非降函数$]$，故成立

(16, 9)　　$^*a(y) \leqslant {}^*a(x)$.

因此得到

(16,10)　　$^*a(y) - {}^*g \leqslant {}^*a(x) - {}^*g < \varepsilon$.

由于ε是任意取的，所以有

(16,11)　　$({}^*a(y) - {}^*g) \in \mathrm{mon}(o)$.

定理(16,3)证完。

请注意，(16,11)的另一意义是$^*a(y) - {}^*g$为无限小。

2．我们在M_2证明以下定理

(16,12)　　若a是b到R的非降函数，σ_+是b的聚点，$\sigma = \inf(b)$且对任何$y \in {}^*b$且满足$^*\sigma < y$和$(y - {}^*\sigma) \in \mathrm{mon}(o)$推得$({}^*a(y) - {}^*g) \in \mathrm{mon}(o)$，那么$\lim\limits_{x \to \sigma+} a(x) = g$.

证明如下．首先由(16,12)中的假设，用公设(5,2)通过*——映射，我们得：*〔*a是*b到*R的非降函数〕，*〔*σ_+是*b的聚点〕，$^*\sigma = {}^*\inf(b)$．进一步由假设中的最后一部分，我们可以推出：对任何$y \in {}^*b$且满足$^*\sigma < y$和$(y - {}^*\sigma) \in \mathrm{mon}(o)$成立

(16,13)　　$^*a(y) > {}^*g - 1$.

又因为*〔*a是*b到*R的非降函数〕，故对任何$y \in {}^*b$且满足$^*\sigma < y$，(16,13)仍然成立。这就是说，我们有

(16,14)　　$(\forall y)[y \in {}^*b \wedge {}^*\sigma < y \to {}^*a(y) > {}^*g - 1]$.

请特别注意，(16,14)是*M中的语句，而且是标准的．现在由公设(5,2)，通过*——映射的逆映射返回到M，我们有

(16,15)　　$(\forall y)[y \in b \wedge \sigma < y \to a(y) > g - 1]$.

现在定义实数集b_1为：

$$x \in b_1 \longleftrightarrow x \in b \wedge \sigma < x.$$

因此，(16,15)表示了：函数a在b_1有下界．因此成立

(16,16) $\lim\limits_{x\to\sigma+} a(x) = g_1 = \inf\limits_{x\in b_1}(a(x))$.

这样由定理(16,3)得:

(16,17) 对任何$y\in {}^*b$且满足$^*\sigma<y$和$y-{}^*\sigma\in \mathrm{mon}(o)$成立$({}^*a(y)-{}^*g_1)\in \mathrm{mon}(o)$.

进一步，由(16,12)的假设的最后一部分可得

(16,18) $^*a(y)-{}^*g\in \mathrm{mon}(o)$.

由(16,17)和(16,18)得

(16,19) $^*g_1-{}^*g\in \mathrm{mon}(o)$.

所以$g=g_1$。由(16,16)可推得

(16,20) $\lim\limits_{x\to\sigma+} a(x) = g$.

定理(16,12)证完.

将定理(16,3)和(16,12) 结合起来，我们得到以下定理

(16,21) 如果a是b到R的非降函数，σ_+是b的聚点，$\sigma=\inf(b)$，那么$\lim\limits_{x\to\sigma+} a(x)=g\longleftrightarrow(\forall y)[y\in {}^*b \wedge {}^*\sigma<y\wedge y-{}^*\sigma\in \mathrm{mon}(o)\to {}^*a(y)-{}^*g\in \mathrm{mon}(o)]$.

定理 (16,21)的结论部分用通常的语言可表述为:

(16,22) $\lim\limits_{x\to\sigma+} a(x)=g$等价于对任何$y\in{}^*b$且$^*\sigma<y$只要$y-{}^*\sigma$是无限小，则$^*a(y)-{}^*g$是无限小.

这就是在分析学中把极限语言转化为无限小语言的桥梁.

3.现在我们把定理(16,21)中的非降函数的条件换为普通的函数.为此，我们在M_2中证明以下定理:

(16,23) 如果a是b到R的函数，σ_+是b的聚点,$\sigma=\inf(b)$，那么$\lim\limits_{x\to\sigma+} a(x)=g\longleftrightarrow(\forall y)[y\in{}^*b\wedge{}^*\sigma<y\wedge y-{}^*\sigma\in \mathrm{mon}(o)\to|{}^*a(y)-{}^*g|\in \mathrm{mon}(o)]$.

证明如下。引进辅助函数$b_2\in \mathrm{ft}(b_1,R)$，其中$b_1$的定义为:

$$x \in b_1 \longleftrightarrow x \in b \wedge \sigma < x.$$

函数b_2的具体定义为，对每个$y \in b_1$

(16,24) $$b_2(y) = \sup_{x \in b_1 \cap (\sigma, y)} (f(x)),$$

其中$f \in \mathrm{ft}(b_1, R)$，具体定义为，当$x \in b_1$

(16,25) $$f(x) = |a(x) - g|.$$

故b_2是b_1到R的非降函数.

由公设(5,2)，通过 * ——映射，把以上的语句转到 $*M$，我们有 $*b_2 \in *\mathrm{ft}(*b_1, *R)$，其中 $*b_1$的定义为：

$$x \in *b_1 \longleftrightarrow x \in *b \wedge *\sigma < x.$$

对每个$y \in *b_1$，函数b_2的具体定义为

(16,26) $$*b_2(y) = *\sup_{x \in *b_1 \cap (*\sigma, y)} (*f(x)),$$

其中$*f \in *\mathrm{ft}(*b_1, *R)$的定义为，当$x \in *b_1$

(16,27) $$*f(x) = |*a(x) - *g|.$$

故*[$*b_2$是$*b_1$到$*R$的非降函数].

在作了上述说明之后，我们正式进行本定理的证明.

首先证明必要性($\longrightarrow$).设

(16,28) $$\lim_{x \to \sigma_+} a(x) = g,$$

那么成立

(16,29) $$\lim_{x \to \sigma_+} b_2(x) = 0.$$

由定理(16,3)，我们有

(16,30) $$(\forall y)[y \in *b_1 \wedge y - *\sigma \in \mathrm{mon}(o) \longrightarrow *b_2(y) \in \mathrm{mon}(o)].$$

注意到(16,26)和(16,27)，由(16,30)可以得到

(16,31) $$(\forall y)[y \in *b_1 \wedge y - *\sigma \in \mathrm{mon}(o)$$

$\longrightarrow |{}^*a(y)-{}^*g|\in \mathrm{mon}(o)]$.

现在证充分性($\longleftarrow$).设(16,31)成立，则由(16,26)和(16,27)可以推得(16,30)成立.进一步由(16,12)推得(16,29)成立.从而推得(16,28)成立.充分性证完.

定理(16,23)证完.

类似于(16,23)，在M_2我们还有以下定理

(16,32) 如果a是b到R的函数，σ_-是b的聚点，$\sigma=\sup(b)$，那么

$$\lim_{x\to\sigma^-} a(x)=g\longleftrightarrow(\forall y)[y\in {}^*b\wedge y<{}^*\sigma\wedge {}^*\sigma - y\in \mathrm{mon}(o)\longrightarrow|{}^*a(y)-{}^*g|\in \mathrm{mon}(o)].$$

4.综合(16,23)和(16,32)，在M_2我们有以下基本定理

(16,33) 若a是b到R的函数，σ是b的聚点，那么

$$\lim_{x\to\sigma} a(x)=g\longleftrightarrow(\forall y)[y\in {}^*b\wedge y\neq {}^*\sigma\wedge|y-{}^*\sigma|\text{是无限小}\longrightarrow|{}^*a(y)-{}^*g|\text{是无限小}].$$

与定理(16,33)相平行，在M_2我们还可以写出以下基本定理

(16,34) 若$a\in \mathrm{ft}(b,R)$，h_+是b的聚点，$h=\inf(b)$，那么

$$\lim_{x\to h^+} a(x)=\begin{cases}+\infty\\-\infty\end{cases}\longleftrightarrow(\forall y)\left[y\in {}^*b\wedge y-{}^*h\text{是正无限小}\longrightarrow {}^*a(y)\text{是}\begin{cases}\text{正无限大}\\\text{负无限大}\end{cases}\right].$$

(16,35) 若$a\in \mathrm{ft}(b,R)$，h_-是b的聚点，$h=\sup(b)$，那么

$$\lim_{x\to h^-} a(x)=\begin{cases}+\infty\\-\infty\end{cases}\longleftrightarrow(\forall y)\left[y\in {}^*b\wedge y-{}^*h\text{是负无限小}\longrightarrow {}^*a(y)\text{是}\begin{cases}\text{正无限大}\\\text{负无限大}\end{cases}\right].$$

(16,36) 若$a\in \mathrm{ft}(b,R)$，$\left.\begin{matrix}+\infty\\-\infty\end{matrix}\right\}$是$b$的聚点，那么

$$\lim_{x\to\left\{\begin{matrix}+\infty\\-\infty\end{matrix}\right.} a(x)=g\longleftrightarrow(\forall y)\Big[y\in {}^*b$$

$$\wedge\, y\text{是}\left\{\begin{matrix}\text{正无限大}\\\text{负无限大}\end{matrix}\right.\longrightarrow {}^*a(y)-{}^*g\text{ 是无限小}\Big].$$

(16,37) 若$a\in \mathrm{ft}(b,R)$，$+\infty$是b的聚点，那么

$$\lim_{x\to+\infty} a(x)=\left\{\begin{matrix}+\infty\\-\infty\end{matrix}\right.\longleftrightarrow(\forall y)\Big[y\in {}^*b\wedge y\text{是正}$$

$$\text{无限大}\longrightarrow {}^*a(y)\text{是}\left\{\begin{matrix}\text{正无限大}\\\text{负无限大}\end{matrix}\right\}.$$

通过(16,33)，(16,34)，(16,35)，(16,36)和(16,37)，读者可以看出，在标准分析M中的极限语言完全可以用无限大和无限小的语言代替，也就是说，标准分析M的理论完全可以在无限小的概念上建立起来．但本书的目的并不是去完成这项任务．本书的主要目的是在M_2中引入一些新概念，使得一些在M中不好解释或不好解决的问题在M_2中得到新的解释或新的解法．特别是关于Dirac Delta函数的理论和奇异积分的理论．

§17 函数的连续性

函数的连续性是标准分析中的重要研究对象．本节初步讨论一下两相微积分中有关函数连续性的一些问题．

在标准分析中，关于函数在一点的连续性，是如下定义的：设$p\in \mathrm{ft}(q,R)$，$y\in q$且y是q的聚点，我们定义

(17,1) p在点y连续$\longleftrightarrow \lim\limits_{x\to y}p(x)=p(y)$．

关于函数在区间上的连续性，在M中可以如下定义：设q是一

个区间，而且$(\exists t)$〔t是q的内点〕，我们定义

(17,2) $p\in C(q)\longleftrightarrow(\forall y)$〔$y\in q\longrightarrow p$在点$y$连续〕.

至于函数在更一般的定义域上的连续性，本书不打算花太多的篇幅去讨论了.读者可按自己的需要去处理.

由公设(5,2)，通过*——映射，将以上二式转到$*M$.关于函数在一点的连续性，如下定义，设$p\in *\mathrm{ft}(q,*R)$，$y\in q$且*〔y是q的聚点〕，我们定义

(17,3) *〔p在点y连续〕$\longleftrightarrow *\lim\limits_{x\to y}p(x)=p(y)$.

关于函数在区间上的连续性，在$*M$可如下定义，设q是一个区间，而且$(\exists t)*$〔t是q的内点〕，我们定义

(17,4) $p\in *C(q)\longleftrightarrow(\forall y)$〔$y\in q\longrightarrow *$〔$p$在点$y$连续〕〕.

在M_2，若$p\in \mathrm{ft}_2(q,R_2)$，$y\in q$且$M_2$〔$y$是$q$的聚点〕，我们可直接定义

(17,5) M_2〔p在点y连续〕$\longleftrightarrow M_2\lim\limits_{x\to y}p(x)=p(y)$.

若q是一个区间，而且$(\exists t)M_2$〔t是q的内点〕，我们定义

(17,6) $p\in M_2C(q)\longleftrightarrow(\forall y)$〔$y\in q\longrightarrow M_2$〔$p$在点$y$连续〕〕.

利用(6,1)，若$y\in q$且*〔y是q的聚点〕，我们有以下等价关系

(17,8) $p\in *C(q)\longleftrightarrow p\in *\Gamma\wedge p\in M_2C(q)$.

用普通的语言，我们可以把$p\in C(q)$读作〔p是q上的连续函数〕，把$p\in *C(q)$读作*〔p是q上的连续函数〕和把$p\in M_2C(q)$读作M_2〔p是q上的连续函数〕.

关于连续函数的四则运算，在M成立以下定理

(17,9) 若y是q的聚点，$y\in q$，p在点y连续和s在点y连续，则成立：

$p\pm s$在点y连续，$p\cdot s$在点y连续和

由$(\forall x)[x\in q\to s(x)\neq 0]$推得$\frac{p}{s}$在点$y$连续.

由公设(5,2)，通过*——映射，在*M关于连续函数的四则运算，成立以下定理

(17,10)　若*[y是q的聚点]，$y\in q$，*[p在点y连续]和*[s在点y连续]，则成立*[$p\pm s$在点y连续]，*[ps在点y连续]和由$(\forall x)$*[$x\in q\to s(x)\neq 0$]推得*$\left[\frac{p}{s}\right.$在点y连续$\left.\right]$.

在M_2关于连续函数的四则运算，成立以下定理

(17,11)　若M_2[y是q的聚点]，$y\in q$，M_2[p在点y连续]和M_2[s在点y连续]，则成立M_2[$p\pm s$在点y连续]，M_2[$p\cdot s$在点y连续]和由$(\forall x)M_2[x\in q\to s(x)\neq 0]$推得$M_2\left[\frac{p}{s}\right.$在点$y$连续$\left.\right]$.

定理(17,11)可以利用M_2中关于函数极限的运算公式(15,13)加以证明.

关于在区间上连续函数的四则运算，也有类似的定理．在M中则是以下定理

(17,12)　若q是区间，$(\exists t)$[t是q的内点]，$p\in C(q)$和$s\in C(q)$，则成立：$p\pm s\in C(q)$，$p\cdot s\in C(q)$和由$(\forall x)[x\in q\to s(x)\neq 0]$推得$\frac{p}{s}\in C(q)$.

在*M和M_2也有类似的定理，我们就不一一写出来了.

关于复合函数的连续性，在M有以下两个定理

(17,13)　设p_1和p_3是区间，$x\in p_1$，$y\in p_3$，$(\exists t)$[t是p_1的内点]和$(\exists t)$[t是p_3的内点]，设$\varphi\in \mathrm{ft}(p_1,p_2)$，

φ在点x连续，$y=\varphi(x)$和$p_2\sqsubseteq p_3$，又设$\psi\in \mathrm{ft}(p_3, R)$和$\psi$在点$y$连续．现在定义函数$\psi(\varphi)\in \mathrm{ft}(p_1, R)$，具体表示为：当$t\in p_1$，定义$\psi(\varphi)(t)=\psi(\varphi(t))$．那么$\psi(\varphi)$在点$x$连续．

(17, 14)　设p_1和p_3是区间，$(\exists t)[t$是p_1的内点$]$和$(\exists t)[t$是p_3的内点$]$，设$\varphi\in \mathrm{ft}(p_1, p_2)$，$p_2\sqsubseteq p_3$，$\varphi\in C(p_1)$和$\psi\in C(p_3)$．如果定义$\psi(\varphi)\in \mathrm{ft}(p_1, R)$，具体表示为：当$t\in p_1$定义$\psi(\varphi)(t)=\psi(\varphi(t))$，那么$\psi(\varphi)\in C(p_1)$．

在$*M$和M_2成立与(17, 13)和(17, 14)相类似的定理，我们就不一一写出来了，读者可以自己把它写出来并加以证明．

在标准分析中，关于连续函数的（哥西）中值定理是十分重要的，这个定理的陈述如下

(17, 15)　若$q_1<q_2$，$p\in C([q_1, q_2])$和$p(q_1)<r<p(q_2)$，则存在x使得$q_1<x<q_2$，而且$p(x)=r$．

由公设(5, 2)，通过$*$——映射，在$*M$成立下述（哥西）中值定理

(17, 16)　若$q_1<q_2$，$p\in *C([q_1, q_2])$和$p(q_1)<r<p(q_2)$，则存在x使得$q_1<x<q_2$而且$p(x)=r$．

但在M_2却不成立如上的中值定理，今举例如下．设$a\in \mathrm{ft}_2([-1, 1], R_2)$，具体定义为

(17, 17)　$$a(x)=\begin{cases}1, & -1\leqslant x\leqslant 1 \text{且} \mathrm{st}(x)\geqslant 0,\\ 0, & -1\leqslant x\leqslant 1 \text{且} \mathrm{st}(x)<0.\end{cases}$$

那么成立以下结论

(17, 18)　$a\in M_2C([-1, 1])$，$-1<1$和$a(-1)<\frac{1}{2}<a(1)$，但是对任何x满足$-1\leqslant x\leqslant 1$都成立$a(x)\neq\frac{1}{2}$．

这就确切地说明了在M_2中不成立关于连续函数的中值定理.

关于反函数，在M成立以下定理

(17,19)　设p是$[q_1,q_2]$到R的升函数，$q_1<q_2$和$p\in C([q_1,q_2])$，则成立p有$[p(q_1),p(q_2)]$到$[q_1,q_2]$的反函数.进一步，若q是$[p(q_1),p(q_2)]$到$[q_1,q_2]$的p的反函数，则q是$[p(q_1),p(q_2)]$到$[q_1,q_2]$的升函数，且$q\in C([p(q_1),p(q_2)])$.

由公设(5,2)，通过*——映射，在$*M$成立以下定理

(17,20)　设$*[p$是$[q_1,q_2]$到$*R$的升函数$]$，$q_1<q_2$和$p\in *C([q_1,q_2])$，则成立$*[p$有$[p(q_1),p(q_2)]$到$[q_1,q_2]$的反函数$]$.进一步，设$*[q$是$[p(q_1),p)q_2)]$到$[q_1,q_2]$的p的反函数$]$，则$*[q$是$[p(q_1),p(q_2)]$到$[q_1,q_2]$的p的升 函 数$]$，且$q\in *C([p(q_1),p(q_2)])$.

在M_2，上述定理并不成立，今举一反例如下.设$a\in ft_2([-1,1],R_2)$，具体定义为

(17,21)
$$a(x)=\begin{cases}x+1, & -1\leqslant x\leqslant 1 \text{且} st(x)\geqslant 0\\ x, & -1\leqslant x\leqslant 1\text{且} st(x)<0.\end{cases}$$

那么成立：$M_2[a$是$[-1,1]$到R_2的升函数$]$，$-1<1$，$a\in M_2C([-1,1])$，$a(-1)=-1$和$a(1)=2$.

若A是$[-1,2]$的子集，具体定义为$A=\{y|-1\leqslant y\leqslant 2\wedge 0\leqslant st(y)<1\}$. 那么不难看出，不存在一个由$[-1,2]$到$[-1,1]$的$p$的反函数.因为在$A$上反函数的值无法给出.

关于连续函数的有界性，在M有以下（Weierstrass）定理

(17,22)　若$q_1<q_2$和$p\in C([q_1,q_2])$，则函数p在$[q_1,q_2]$有上界和下界.

由公设(5,2)，通过*——映射，在$*M$成立以下定理

(17,23)　若$q_1<q_2$和$p\ni {}^*C([q_1,q_2])$，则*〔函数p在$[q_1,q_2]$有上界和下界〕.

在M_2中上述定理不成立，今举一反例如下．首先，令A是${}^*N$的N分解，${}^*N=\bigcup_{i\in N}A_i$．又取$m_i\in A_i$，$i\in N$．进一步，设$B$是正无限大．我们在$[-B,B]$上定义函数$a\in \mathrm{ft}_2([-B,B],R_2)$，具体表示如下：

(17,24)　$a(x)=1$，若$-B\leqslant x\leqslant B$且x是无限大.

当x是有限数，规定a是奇函数，即$-a(x)=a(-x)$．当x是非负有限数，a的具体表示如下

(17,25)　$a(x)=\begin{cases} m_1x, 若0\leqslant x<1, \\ m_i+(m_i-m_{i-1})(x-m_i), \end{cases}$

若$i-1\leqslant x<i, 2\leqslant i\in N$.

那么$a\in M_2C([-B,B])$，但a在$[-B,B]$没有上界和下界.

关于函数的最大最小值，在M有以下定理

(17,26)　若$q_1<q_2$和$p\in C([q_1,q_2])$，则存在一个x_1，$q_1\leqslant x_1\leqslant q_2$使得

$$p(x_1)=\min_{x\in[q_1,q_2]}(p(x));$$

又存在一个x_2，$q_1\leqslant x_2\leqslant q_2$使得

$$p(x_2)=\max_{x\in[q_1,q_2]}(p(x)).$$

由公设(5,2)，通过*——映射，将上式转到${}^*M$，有以下定理

(17,27)　若$q_1<q_2$和$p\in {}^*C([q_1,q_2])$，则存在一个x_1，$q_1\leqslant x_1\leqslant q_2$使得

$$p(x_1)={}^*\min_{x\in[q_1,q_2]}(p(x));$$

又存在一个x_2，$q_1\leqslant x\leqslant q_2$使得

$$p(x_2) = {}^*\max_{x\in[q_1,q_2]}(p(x)).$$

在M_2则没有相应的定理。我们指出由(17,24)和(17,25)所定义的$a(x)$在$[-B,B]$上就取不到最大值和最小值。其实，$a(x)$既无上界，又无下界，怎么谈得上有最大值和最小值呢？

关于一致连续的概念，在M是如下定义的。若q是个区间，而且存在t是q的内点，又设$p\in \mathrm{ft}(q,R)$，我们定义

(17,28) p在q一致连续$\longleftrightarrow(\forall\varepsilon)[\varepsilon>0\longrightarrow(\exists\delta)[\delta>0\wedge(\forall x_1)(\forall x_2)[x_1\in q\wedge x_2\in q\wedge|x_1-x_2|<\delta\longrightarrow|p(x_1)-p(x_2)|<\varepsilon]]]$.

由公设(5,2)，通过*——映射，将上式转到$^*M$，若q是个区间，而且*[存在t是q的内点]，又设$p\in{}^*\mathrm{ft}$ $(q, {}^*R)$，我们定义

(17,29) *[p在q一致连续]$\longleftrightarrow(\forall\varepsilon)[\varepsilon>0\longrightarrow(\exists\delta)[\delta>0\wedge(\forall x_1)(\forall x_2)[x_1\in q\wedge x_2\in q\wedge|x_1-x_2|<\delta\longrightarrow|p(x_1)-p(x_2)|<\varepsilon]]]$.

在M_2，若q是个区间，M_2[存在t是q的内点]和$p\in\mathrm{ft}_2(q,R_2)$，我们定义

(17,30) M_2[p在q一致连续]$\longleftrightarrow(\forall\varepsilon)[\varepsilon>0\longrightarrow(\exists\delta)[\delta>0\wedge(\forall x_1)(\forall x_2)[x_1\in q\wedge x_2\in q\wedge|x_1-x_2|<\delta\longrightarrow|p(x_1)-p(x_2)|<\varepsilon]]]$.

若q是区间，M_2[存在t是q的内点]和$p\in\mathrm{ft}_2(q,q_2)$，利用(6,1)可得以下等价关系

(17,31) *[p在q一致连续]$\longleftrightarrow p\in{}^*\Gamma\wedge M_2$[$p$在$q$一致连续]。

关于一致连续性，在M有以下康托（Cantor）定理

(17,32) 若$q_1<q_2$，且$p\in C([q_1,q_2])$，则p在$[q_1,q_2]$一致连续。

但在M_2这样的定理并不成立．由（17,24）和（17,25）所定义的$a(x)$，它满足$a\in M_2C([q_1,q_2])$，但在$[q_1,q_2]$ a并不一致连续．

用公设(5,2)，将(17,32)转到$*M$成立以下定理

(17,33)　　若$q_1<q_2$且$p\in *C([q_1,q_2])$，则$*[p$在$[q_1,q_2]$一致连续]．

第四章　导数和积分

本章的中心是在M，$*M$和M_2中论述导数，积分等概念，并互相比较。值得注意的是：要在M_2中一般地引进定积分的概念是不可能的。显然在M_2中可以引入很多比较局限的定积分的概念，但本书不打算研究这类问题。

§18　导数的概念

导数是微积分中最重要的概念之一，本节在M，$*M$和M_2中分别研究和相互比较这些概念。

导数的定义　在M若q是区间，存在t是q的内点，$p\in \mathrm{ft}(q, R)$和$x\in q$，我们定义

(18,1)
$$p'(x)=r\longleftrightarrow\frac{dp(x)}{dx}=r\longleftrightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\frac{p(x+\Delta x)-p(x)}{\Delta x}=r。$$

我们称$p'(x)$或$\frac{dp(x)}{dx}$为函数p在x点的导数.因为原来在标准分析中已经有了这两种表示法，所以我们只能把它们都写上.

由公设(5,2)，通过$*$——映射，将上式转到$*M$，若q是区间，$*$〔存在t是q的内点〕，$p\in *\mathrm{ft}(q, *R)$和$x\in q$，我们定义

(18,2)
$$p^{*\prime}(x)=r\longleftrightarrow\frac{*dp(x)}{dx}=r\longleftrightarrow *\lim_{\Delta x\to 0}\frac{p(x+\Delta x)-p(x)}{\Delta x}=r.$$

我们称 $p^{*\prime}(x)$ 和 $\frac{{}^*dp(x)}{dx}$ 为函数p在x点的*〔导数〕。

在M_2，若q是区间，M_2〔存在t是q的内点〕，$p\in \mathrm{ft}_2(q, R_2)$和$x\in q$，我们同样可以定义

(18,3) $$M_2p'(x)=r\longleftrightarrow M_2\frac{dp(x)}{dx}=r\longleftrightarrow$$

$$M_2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{p(x+\Delta x)-p(x)}{\Delta x}=r.$$

我们称$M_2p'(x)$和 $\frac{M_2dp(x)}{dx}$ 为$p(x)$在点x的M_2导数。

若q是区间，M_2〔存在t是q的内点〕，$p\in \mathrm{ft}_2(q, R_2)$，$x\in q$，利用（6，1）可得以下等价关系

(18,4) $$p^{*\prime}(x)=r\longleftrightarrow p\in {}^*\Gamma\wedge$$
$$M_2p'(x)=r.$$

为了方便，若q是区间，存在t是q的内点，$x\in q$和$p\in \mathrm{ft}(q, R)$，我们在M引入以下两个定义

(18,5) p在点x可导$\longleftrightarrow(\exists r)[p'(x)=r]$，

p在区间q可导$\longleftrightarrow(\forall x)[x\in q\longrightarrow p$在点$x$可导〕。

由公设（5,2），通过*——映射，在$^*M$若q是区间，*〔存在t是q的内点〕，$x\in q$和$p\in {}^*\mathrm{ft}(q, {}^*R)$，我们引入以下两个定义

(18,6) *〔p在点x可导〕$\longleftrightarrow(\exists r)[p^{*\prime}(x)=r]$，

〔p在区间q可导〕$\longleftrightarrow(\forall x)[x\in q\longrightarrow$〔$p$在点$x$可导〕〕。

在M_2，若q是区间，存在t是q的内点，$x\in q$和$p\in \mathrm{ft}_2(q, R_2)$，我们同样可以定义

(18,7) M_2〔p在点x可导〕$\longleftrightarrow(\exists r)[M_2p'(x)=r]$，

M_2〔p在区间 q 可导〕$\longleftrightarrow(\forall x)$〔$x\in q\longrightarrow M_2$〔$p$在点可导〕〕.

这样，若q是区间，M_2〔存在t是q的内点〕，$x\in q$和$p\in \mathrm{ft}_2(q, R_2)$，利用（6,1），在$M_2$成立以下两个等价关系

（18,8）　　$*$〔p在点x可导〕$\longleftrightarrow p\in {}^*\Gamma\wedge M_2$〔$p$在点$x$可导〕.

$*$〔p在区间q可导〕$\longleftrightarrow p\in {}^*\Gamma\wedge M_2$〔$p$在区间$q$可导〕.

关于反函数的导数，进行以下讨论.

在M有以下定理：

（18,9）　　若q_1是区间，存在t_1是q_1的内点和$x\in q_1$，又q_2是区间，存在t_2是q_2的内点和$y\in q_2$，又设$p\in \mathrm{ft}(q_1, q_2)$，$p$ 有q_2到q_1的反函数和q是q_2到q_1的p的反函数，设p在点x可导，$p'(x)\neq 0$和$y=p(x)$，那么成立：q在点y可导和

$$q'(y)=\frac{1}{p'(x)}.$$

由公设（5,2），通过 $*$ ——映射，转到$*M$成立以下定理

（18,10）　　若q_1是区间，$*$〔存在t_1是q_1的内点〕和$x\in q_1$，又q_2是区间，$*$〔存在t_2是q_2的内点〕和$y\in q_2$，又设$p\in *\mathrm{ft}(q_1, q_2)$，$*$〔$p$有$q_2$到$q_1$的反函数〕和 $*$〔q是q_2到q_1的p的反函数〕，设 $*$〔p在点x可导〕，$p^{*\prime}(x)\neq 0$ 和$y=p(x)$，那么成立：$*$〔q在点y可导〕和

$$q^{*\prime}(y)=\frac{1}{p^{*\prime}(x)}.$$

在M_2有类似的定理，今陈述如下：

（18,11）　　若q_1是区间，M_2〔存在t_1是q_1的内点〕和$x\in q_1$，又q_2是区间，M_2〔存在t_2是q_2的内点〕和 $y\in q_2$，又

设$p \in \mathrm{ft}_2(q_1, q_2)$，$M_2$〔$p$有$q_2$到$q_1$的反函数〕和$M_2$〔$q$是$q_2$到$q_1$的$p$的反函数〕，设$M_2$〔$p$在点$x$可导〕，$M_2 p'(x) \neq 0$和$y = p(x)$，那么成立：

M_2〔q在点y可导〕和

$$M_2 q'(y) = \frac{1}{M_2 p'(x)}.$$

关于函数改变量的主要部分，在M成立以下定理：

(18,12)　若q是区间，存在t是q的内点，$x \in q$，p在点x可导，又对任何t只要满足$x + t \in q$和$t \neq 0$，由等式

$$p(x+t) - p(x) = p'(x) + \alpha(x,t)t$$

定义了$\alpha(x,t)$，则成立

$$\lim_{t \to 0} \alpha(x,t) = 0.$$

由公设（5,2），将上式转到$*M$，我们有以下定理

(18,13)　若q是区间，*〔存在t是q的内点〕，$x \in q$，*〔p在点x可导〕，又对任何t只要满足$x + t \in q$和$t \neq 0$，由等式

$$p(x+t) - p(x) = p^{*\prime}(x)t + \alpha(x,t)t$$

定义了$\alpha(x,t)$，则成立

$$*\lim_{t \to 0} \alpha(x,t) = 0.$$

在M_2，由导数的定义直接推得成立以下定理

(18,14)　若q是区间，M_2〔存在t是q的内点〕，$x \in q$，M_2〔p在点x可导〕，又对任何t只要满足$x + t \in q$和$t \neq 0$，由等式

$$p(x+t) - p(x) = M_2 p'(x) + \alpha(x,t)t$$

定义了$\alpha(x,t)$，则成立

$$M_2 \lim_{t \to 0} \alpha(x,t) = 0.$$

在标准分析M中，由函数的可导性可以推得函数的连续

性，具体表示为以下定理

(18,15)　若q是区间，存在t是q的内点，$x\in q$和p在点x可导，则p在点x连续。

在$^*M$和M_2也有与（18,15）同样形式的定理，这里不再细说了。

关于函数四则运算的导数，在M有以下法则，今表述为以下两个定理

(18,16)　若q是区间，存在t是q的内点，$x\in q$，常数$p\in R$，$u\in \mathrm{ft}(q, R)$，u在点x可导，如果定义函数$pu\in \mathrm{ft}(q, R)$，其具体表示为，对每个$t\in q$

$(pu)(t)=p\cdot u(t)$，

那么pu在点x可导，而且

$(pu)'(x)=p\cdot u'(x)$；

(18,17)　若q是区间，存在t是q的内点，$x\in q$，$u\in \mathrm{ft}(q, R)$，u在点x可导，$v\in \mathrm{ft}(q,R)$和v在点x可导，那么成立以下结论：

（1）$u\pm v$在点x可导且成立公式

$(u\pm v)'(x)=u'(x)\pm v'(x)$；

（2）$u\cdot v$在点x可导且成立公式

$(uv)'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$；

（3）若对任何$t\in q$成立$v(t)\neq 0$，则$\dfrac{u}{v}$在点x可导，且成立公式

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

在$^*M$和M_2中也成立像（18,16）和（18,17）这样的定理，读者很容易在$^*M$和M_2中写出这样的定理，并在M_2中加以证明。

关于复合函数的导数，在M有以下定理

(18,18)　若q是区间，存在t是p的内点，$x\in q$；又p是区间，存在t是p的内点，$y\in p$；又$\varphi\in \mathrm{ft}(q,\ p)$且$\varphi$在点$x$可导；又$\psi\in \mathrm{ft}(p,\ R)$且$\psi$在点$y$可导，$y=\varphi(x)$；又对每个$t\in q$定义函数$\psi(\varphi)\in \mathrm{ft}(q,R)$，具体表示为$\psi(\varphi)(t)=\psi(\varphi(t))$，那么成立$\psi(\varphi)$在点$x$可导而且成立$\psi(\varphi)'(x)=\psi'(y)\varphi'(x)$。

由公设（5,2），通过＊——映射，我们可以在$^*M$中得到定理（18,18）的相应表示。而且进一步可以在M_2中得到相应的定理，并加以证明。

我们把定理(18，18)比较准确的写出来，是为了正确地使用＊——映射把它转换到$^*M$中去。在必要时，可把它的相类似的定理在M_2中写出来，并考察它的证明。这是我们经常使用的方法。

今后，我们只对$^*M$和M_2中比较重要的情形才全文写出其表达式，否则只在M中写出比较精确的（半形式化）的表达式。读者可以自己写出在$^*M$中相应的表达式，并研究在M_2中是否有相应的表达式，如果是定理，还可以研究它是否可以证明。

以下我们将研究一下高阶导数的定义。为了方便，我们先引入一个辅助定义

(18,19)　q是有内点的区间$\longleftrightarrow q$是区间而且存在t是q的内点。

由公设(5,2)，通过＊——映射，我们可以准确的定义＊〔q是有内点的区间〕，还可以在M_2引入定义M_2〔q是有内点的区间〕并容易看出

(18,20)　〔q是有内点的区间〕$\longleftrightarrow M_2$〔q是有内点的区间〕。

我们知道，在M中有以下事实

(18,21)　对每个$n\in N$，n阶导数是可以定义的。

由公设（5,2），通过 * 一一映射，在 $*M$ 中有以下事实

(18,22)　　对每个 $n\in *N$，*〔n阶导数是可以定义的〕.

但这样的说法使人感到不具体。我们将设法找出一种比较具体的定义，使人们感到踏实一点.

今在 M 中写出高阶导数的半形化的一种定义方法．先引进如下符号

(18,23)　　在区间(　)的点(　)有(　)次导数的函数 $\in$ ft(N, ((0,(0)),((0,0)))型函数),

( )$^{(\ )}$( ) $\in$

ft(N, (((0,0), (0), 0), 0)型函数),

在区间(　)有(　)次导数的函数 $\in$ ft(N, ((0), ((0,0)))型函数),

( )$^{(\ )}\in$ ft(N,(((0,0), (0)), (0,0)) 型函数).

今作具体解释如下，当 $n=1$

(18,24)　　在区间(　)的点(　)有(1)次导数的函数 $\in$ ((0, (0)), ((0,0)))型函数，具体定义为：

$(\forall x)(\forall q)$〔q是有内点的区间 $\wedge x\in q\longrightarrow$〔$p$ 是在区间(q)的点(x)有(1)次导数的函数 $\longleftrightarrow$ $p\in \mathrm{ft}(q,R)\wedge$

$$(\exists r)\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{p(x+\Delta x)-p(x)}{\Delta x}=r\right]\Big]\Big],$$

( )$^{(1)}$( ) $\in$ (((0,0),(0),0),0)型函数.

具体定义为：

$(\forall q)(\forall x)(\forall p)$〔$q$是有内点的区间 $\wedge x\in q\wedge p$ 是在区间(q)的点(x)有(1)次导数的函数 $\longrightarrow$

$$(p)^{(1)}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{p(x+\Delta x)-p(x)}{\Delta x}\Big],$$

在区间（　）有（1）次导数的函数∈（（0），（（0，0）））型函数，具体定义为：

$(\forall q)$〔q是有内点的区间⟶〔p是在区间(q)有（1）次导数的函数⟷$(\forall x)$〔$x\in q$⟶p是在区间(q)的点(x)有（1）次导数的函数〕〕〕；

$(\quad)^{(1)}\in(((0,0),(0)),(0,0))$型函数，满足以下性质：

$(\forall q)$〔q是有内点的区间∧p是在区间(q)有（1）次导数的函数⟶$(p)^{(1)}\in \mathrm{ft}(q,R)$〕。

现在对任何$n\in N$，如果设

(18,25)　在区间（　）的点（　）有(n)次导数的函数∈（（0，（0）），（（0，0）））型函数，

$(\quad)^{(n)}(\quad)\in(((0,0),(0),0),0)$型函数，

在区间（　）有(n)次导数的函数∈（（0），（（0，0）））型函数，

$(\quad)^{(n)}\in(((0,0),(0)),(0,0))$型函数。

那么对$n+1\in N$，我们可以定义

(18,26)　在区间（　）的点（　）有$(n+1)$次导数的函数∈（（0，（0）），（（0，0）））型函数，具体定义为：

$(\forall x)(\forall q)$〔q是有内点的区间∧$x\in q$⟶〔p是在区间(q)的点(x)有$(n+1)$次导数的函数⟷p是在区间(q)的点(x)有(n)次导数的函数∧$(p)^{(n)}$是在区间(q)的点(x)有（1）次导数的函数〕〕；$(\quad)^{(n+1)}(\quad)\in(((0,0),(0),0),0)$型函数，具体定义为：

$(\forall q)(\forall x)(\forall p)$〔$q$是有内点的区间∧$x\in q$∧$p$是在区间$(q)$的点$x$有$(n+1)$次导数的函数⟶$(p)^{(n+1)}(x)=((p)^{(n)})^{(1)}(x)$〕；

在区间(　)有$(n+1)$次导数的函数$\in((0),((0,0)))$型函数，具体定义为：

$(\forall q)$〔q是有内点的区间$\longrightarrow$〔p是在区间(q)有$(n+1)$次导数的函数$\longleftrightarrow(\forall x)$〔$x\in q\longrightarrow p$是在区间$(q)$的点$(x)$有$(n+1)$次导数的函数〕〕〕；

$(\quad)^{(n+1)}\in(((0,0),(0),(0,0))$型函数，满足以下性质：

$(\forall q)$〔q是有内点的区间$\wedge p$是在区间(q)有$(n+1)$次导数的函数$\longrightarrow(p)^{(n+1)}\in f t(q,R)$〕。

因此，根根§8中所述的M中的归纳法$(8,1)$，可知对每个$n\in N$，$(18,23)$中的概念是有定义的。这就较准确的完成了高阶导数的定义.我们这么仔细写出来，是为了便于使用公设$(5,2)$，通过$*$——映射把$(18,23)$、$(18,24)$，$(18,25)$和$(18,26)$转到$^*M$中去. 又根据$^*M$中的归纳法$(8,2)$，我们可以对每个$n\in {}^*N$定义高阶导数.

在M_2中，我们也可以仿照$(18,23)$至(18.26)的定义过程进行高阶导数的定义.但需注意，由于在M_2中只能使用归纳法$(8,12)$，所以只能对每个$n\in N$定义高阶导数.

利用数学归纳法$(8,1)$，在M有以下定理

(18,27)　若q是有内点的区间，p在区间q有1次导数、又对任何$n\in N$，只要p在区间q有n次导数，就可推得p在区间q有$n+1$次导数，那么对任何$m\in N$，p在区间q有m次导数.

由公设$(5,2)$，通过$*$——映射，在$^*M$成立以下定理

(18,28)　若$*$〔q是有内点的区间〕$*$〔p在区间q有1次导数〕，又对任何$n\in {}^*N$，只要$*$〔p在区间q有n次导数〕,就可推得$*$〔p在区间q有$n+1$次导数〕，那么对任何$m\in {}^*N$，$*$〔p在区间q有m次导数〕.

利用（8,12），在M_2只可得到以下定理

（18,29）　若M_2〔q是有内点的区间〕，M_2〔p在区间q有1次导数〕，又对任何$n\in N$，只要M_2〔p在区间q有n次导数〕，就可推得M_2〔p在区间q有$n+1$次导数〕，那么对任何$m\in N$，M_2〔p在区间q有M次导数〕。

请注意，在（18,28）中，$^*M$中的导数是对任何$m\in {}^*N$而言，但在（18,29）中，M_2的导数只能对$m\in N$而言。为了强调这一点，所以把（18,28）和（18,29）详细写出来。

以下讨论莱布尼茨公式。

在M中，莱布尼茨公式可以如下陈述

（18,30）　若$n\in N$，q是有内点的区间，u和v都是在区间q有n次导数的函数，那么成立

$$(uv)^{(n)}=\sum_{m=0}^{n}C_m^n u^{(n-m)}v^{(m)}.$$

由公设（5,2），将上式转到$^*M$，莱布尼茨如下表示

（18,31）　若$n\in {}^*N$，*〔q是有内点的区间〕，*〔u和v都是在区间q有n次导数的函数〕，那么成立

$$(uv)^{*(n)}={}^*\sum_{m=0}^{n}{}^*C_m^n u^{*(n-m)}v^{*(m)}.$$

在M_2，由数学归纳法（8,12），我们只能得到如下的定理

（18,32）　若$n\in N$，M_2〔q是有内点的区间〕，M_2〔u和v都是在区间q有n次导数的函数〕，那么成立

$$M_2(u\cdot v)^{(n)}=\sum_{m=0}^{n}C_m^n M_2u^{(n-m)}M_2u^{(m)}.$$

请注意，（18,32）只对$n\in N$成立。

§19　微分学的基本定理

众所周知，在微分学中最简单的是费马（Fèrmat）定理，

它在M中的表述如下

(19,1) 若q是区间，x是q的内点，p在点x可导和$p(x)=\max\limits_{y\in q}p(y)$，那么$p'(x)=0$。

由公设（5,2），将上式转到$*M$，费马定理的表述如下

(19,2) 若q是区间，$*$〔x是q的内点〕，$*$〔p在点x可导〕和$p(x)=*\max\limits_{y\in q}p(y)$，那么$p^{*\prime}(x)=0$。

很凑巧，在M_2也成立如下的费马定理

(19,3) 若q是区间，M_2〔x是q的内点〕，M_2〔p在点x可导〕和$p(x)=\max\limits_{y\in q}{}_2 p(y)$，则$M_2 p'(x)=0$。

在M_2中，费马定理是可以独立证明的。

在M中，有以下形式的达布（Darboux）定理：

(19,4) 若$q_1<q_2$，p在区间$[q_1,q_2]$可导和$p'(q_1)<p'(q_2)$，那么对任何r，只要满足$p'(q_1)<r<p'(q_2)$，则存在x，它满足$q_1<x<q_2$而且$p'(x)=r$。

由公设（5,2），我们可将达布定理转到$*M$中去，这个读者很容易完成。这里仅指出，在M_2中这样的定理是没有的，今举例如下。若$a\in \mathrm{ft}_2([0,B],R_2)$，$B$是正无限大，具体定义为：

(19,5)
$$a(x)=\begin{cases}-x, & x\in[0,B]\text{且}x\text{是有限数,}\\ x-B, & x\in[0,B]\text{且}x\text{是无限大.}\end{cases}$$

那么$a(0)=0$，$a(B)=0$，在M_2的导数为

(19,6)
$$M_2 a'(x)=\begin{cases}-1, & x\in[0,B]\text{且}x\text{是有限数,}\\ 1, & x\in[0,B]\text{且}x\text{是无限大.}\end{cases}$$

于是$M_2 a'(0)=-1$和$M_2 a'(B)=1$。如果取$r=\frac{1}{2}$，自然成立

$$M_2 a'(0)<r<M_2 a'(B),$$

那么对任何x，它满足$0<x<B$都成立$M_2 a'(x) \neq \frac{1}{2}$.这就是说在$M_2$达布定理不成立.

在M成立罗尔（*Rolle*）定理

(19,7) 若$q_1<q_2$，$p\in C([q_1,q_2])$，p在区间(q_1,q_2)可导和$p(q_1)=p(q_2)$，则存在x，它满足$q_1<x<q_2$而且$p'(x)=0$.

用公设(5,2)，读者不难在$*M$中写出罗尔定理。但在M_2中，罗尔定理并不成立.由(19,5)所定义的$a(x)$就是一个反例.

在M有拉格朗日（Lagrange）定理

(19,8) 若$q_1<q_2$，$p\in C([q_1,q_2])$，p在区间(q_1,q_2)可导，则存在x，它满足$q_1<x<q_2$而且

$$p'(x)=\frac{p(q_2)-p(q_1)}{q_2-q_1}.$$

由于这个定理很重要，所以我们通过公设(5,2)，在$*M$将拉格朗日定理表述如下

(19,9) 若$q_1<q_2$，$p\in *C([q_1,q_2])*[p$在区间(q_1,q_2)可导]，则存在x，它满足$q_1<x<q_2$而且

$$p^{*\prime}(x)=\frac{p(q_2)-p(q_1)}{q_2-q_1}.$$

在M_2并没有拉格朗日定理，(19,5)所定义的$a(x)$就是一个反例.

在M有柯西定理

(19,10) 若$q_1<q_2$，p和$s\in C([q_1,q_2])$，p和s在区间(q_1,q_2)可导，而且对任何t满足$q_1<t<q_2$成立$s'(t)\neq 0$，那么存在x，它满足$q_1<x<q_2$和

$$\frac{p'(x)}{s'(x)}=\frac{p(q_2)-p(q_1)}{s(q_2)-s(q_1)}.$$

由公设（5,2），我们可以把（19,10）转到$*M$，但在M_2没有类似的定理，（19,5）所定义的$a(x)$就是一个很好的反例。

为了建立不定积分理论，下面的定理在M中是十分重要的，今陈述如下

（19,11）　若$q_1<q_2$，$p\in C([q_1,q_2])$和p在区间（q_1，q_2）可导，则成立以下结论：对任何x满足$q_1<x<q_2$成立$p'(x)=0$其充要条件是存在常数r对任何x满足$q_1\leqslant x\leqslant q_2$成立$p(x)=r$.

由公设（5,2），将上式转到$*M$，成立以下定理

（19,12）　若$q_1<q_2$，$p\in *C([q_1,\ q_2])$和$*[p$在区间（q_1，q_2）可导]，则成立以下结论：对任何x满足$q_1<x<q_2$成立$p^{*\prime}(x)=0$其充要条件是存在常数r对任何x满足$q_1<x<q_2$成立$p(x)=r$.

在M_2中没有上述定理，情况极端复杂.今举一简单反例如下.

在M_2中设$a\in \mathrm{ft}_2([0,1],R_2)$，在$R_2$中对每个$x\in[0,1]$，其具体定义为

（19,13）　$a(x)=sl(x)$.

这样$a\in M_2C([q_1,q_2])$，$M_2[p$在区间(q_1,q_2)可导]而且在对每个R_2的$x\in[0,1]$成立$M_2p'(x)=0$，但是$a(x)$在$[0,1]$并不等于一个常数.其实，在M_2中导数为0的函数是极端复杂的，不是很容易把它们描述得很清楚，本书就不在这个问题上过多地停留了.

§20　标准函数在标准点上的导数

本节的主要目的是讨论M中的函数，更确切地说是$*M$中的标准函数的导数，把它们表示为两个无限小量之商.

首先，在M中的下述语句

（20,1）　b是有内点的区间，$c\in b$，a在点c可导且$a'(c)=f$.

由公设（5,2），通过*——映射，将（20,1）转到*M变为以下等价语句

（20,2）　*〔*b是有内点的区间〕，*$c\in *b$，*〔*a在点*c可导〕且*$a^{*\prime}(*c)=*f$。

将（16,33）用到（20,1）的那些假设上，在M_2成立

（20,3）　$a'(c)=f\longleftrightarrow(\forall t)$〔$*c+t\in *b\wedge t\neq 0\wedge t$是无无限小$\longrightarrow$

$$\left|\frac{*a(*c+t)-*a(*c)}{t}-*f\right|\text{是无限小〕}$$

由上面的结论可以得到以下两个定理，第一个是

（20,4）　若b是有内点的区间，$c\in b$，和a在点c可导，则对任何的t满足$*c+t\in *b$和$t\neq 0$只要t是无限小，就成立

$$st\left(\frac{*a(*c+t)-*a(*c)}{t}\right)=a'(c)\text{。}$$

这就是说，$a'(c)$是两个无限小量之商的标准部分。第二个则是

（20,5）　若b是有内点的区间，$c\in b$，又对任何t满足$*c+t\in *b$和$t\neq 0$，只要t是无限小，则对某个$f\in R$成立

$$st\left(\frac{*a(*c+t)-*a(*c)}{t}\right)=f$$

那么成立a在点c可导且$a'(c)=f$。

这就是说，对于标准函数而言，为了求得它的导数，只要取自变量的改变量为无限小，再求得相应的函数的改变量与自变量的改变量之商，然后取标准部分就得到了此函数在标准点上的导数。在这种意义下，可以说，导数是两个微小改变量之商。

§21 不定积分

在M，$*M$和M_2中都可以引入不定积分的概念。但在M_2中由于没有与（19,11）相类似的定理，则情况大不相同。

首先引入反导数的概念。

在M中若q是有内点的区间，p在区间q可导和$s\in \mathrm{ft}(q,R)$，这时我们定义

(21,1)　　p是s在区间q的反导数$\longleftrightarrow(\forall x)[x\in q\longrightarrow p'(x)=s(x)]$.

通过公设（5,2），我们可以把上式转到$*M$成为定义$*[p$是s在区间q的反导数$]$.在M_2，若$M_2[q$是有内点的区间$]$，$M_2[p$在区间q可导$]$和$s\in \mathrm{ft}_2(q,R_2)$，这时可定义

(21,2)　　$M_2[p$是s在区间q的反导数$]\longleftrightarrow(\forall x)[x\in q\longrightarrow M_2p'(x)=s(x)]$.

由（9,12），（18,4）和（18,8）第二式可得以下等价关系

(21,3)　　$*[p$是s在区间q的反导数$]\longleftrightarrow p\in *\Gamma\wedge s\in *\Gamma\wedge M_2[p$是$s$在区间$q$的反导数$]$.

在M有以下定理

(21,4)　　若q是有内点的区间，p在区间q可导，$s\in \mathrm{ft}(q,R)$和p是s在区间q的反导数，又C是R中的任意常数，则$p+C$仍是s在区间q的反导数.

由公设（5,2），将上式转到$*M$便成为$*M$中相应的定理.进一步，根据定义，在M_2也有一个与（21,4）相类似的定理.

进一步，在M有以下定理

(21,5)　　若q是有内点的区间，φ和ψ在区间q可导，$s\in ft(q,R)$，φ和ψ是s在区间q的反导数，那么存在一个常数$C\in R$，使得对任何$x\in q$成立
$\varphi(x)=\psi(x)+C$.

由公设（5,2），通过$*$——映射，可以把（21,5）转到$*M$.但是在M_2并没有与（21,5）相类似的定理.例如（19,13)所表示的$a(x)$，它在〔0,1〕的M_2〔导数〕都为0，但是$a(x)$在〔0,1〕不等于一个固定的常数.

关于不定积分，在M可以如下定义

（21,6）　若q是有内点的区间，$\varphi\in \mathrm{ft}(q,R)$，存在$p$是$\varphi$在$q$的反导数，又$C\in R$是任意常数，则定义$p(x)+C$是$\varphi$在区间$q$的不定积分.我们以$\int\varphi(t)dt$表示$\varphi$在区间$q$上的不定积分，于是成立等式

$$\int\varphi(t)dt=p(x)+C.$$

由公设（5,2），通过$*$——映射，我们可以把（21,6）转到$*M$，并且以$*\int\varphi(t)dt$表示函数φ在区间q上的不定积分.在M_2问题没有这么简单.

为了在M_2定义不定积分，我们先得引入一个辅助概念.若M_2〔q是有内点的区间〕和M_2〔y在区间q可导〕，我们定义

（21,7）　M_2〔y是区间q的零导函数〕$\longleftrightarrow(\forall x)$〔$x\in q\longrightarrow M_2 y'(x)=0$〕.

这样，在M_2可以如下引入不定积分的概念

（21,8）　若M_2〔q是有内点的区间〕,$\varphi\in \mathrm{ft}_2(q,R_2)$，$M_2$〔存在$p$是$\varphi$在区间$q$的反导数〕，对任意的$y$,$M_2$〔$y$是区间$q$的零导函数〕，则定义$p(x)+y(x)$是$M_2$〔$\varphi$在区间$q$的不定积分〕.我们以$M_2\int\varphi(t)dt$表示$M_2$〔$\varphi$在区间$q$的不定积分〕，于是成立

$$M_2\int\varphi(t)dt=p(x)+y(x).$$

关于不定积分的运算，有以下简单的法则.在M中若q是有内点的区间，$\varphi\in \mathrm{ft}(q,R)$，常数$s\neq 0$，则成立

(21,9) $$\int s\varphi(t)dt=s\int\varphi(t)dt.$$

又若$\psi\in ft(q,R)$，则有

(21,10) $$\int(\varphi\pm\psi)\,dt=\int\varphi dt\pm\int\psi dt.$$

关于不定积分的换元法则，在M表示为

(21,11) 如果$\int\varphi(t)dt=\Phi(t)+C$，则

$$\int\varphi(\psi(x))\psi'(x)dx=\Phi(\psi(x))+C.$$

关于分部积分的法则，在M表示为

(21,12) 若q是有内点的区间，u和v在区间q可导，那么由

$\int vu'dt$的存在可推得

$$\int uv'dt=uv-\int vu'dt.$$

由公设（5,2）可以把（21,9），（21,10），(21,11)和(21,12）转到$*M$.由于“$\int$”号是M中的固定的符号，所以在$*M$中可记为“$*\int$”.

至于M_2，也有类似的公式，不过在与(21,11)相类似的换元公式中，常数C需换成任意的y,M_2〔y是区间q的零导函数〕.

§22 定 积 分

由上节的研究，知道在M_2中仍然可以定义不定积分的概念，但是与M中的不定积分已有较大差别.但是在M_2不能象在M那样普遍地引入定积分的定义，这是因为在§10中已经说明

了有限和的概念无法在M_2中普遍地推广.但在比较狭窄的意义下，在M_2中仍然可以引进多种多样的定积分的定义.本节所讨论的只是很特别的一种，即在$*M$中引入定积分的定义.

我们知道，$*M$中的定积分是由M中的定积分通过公设(5,2)转换而来的.又M中的定积分又是通过分割、求和、取极限等步骤定义的，为了能准确地使用*——映射，我们必须把分割、求和、取极限等步骤标准化（半形式化），才能准确说明分割、求和、取极限等概念在$*M$中的含义。实际上，这是本书的基本方法.虽然在公设(5,2)中由*——映射规定了概念之间的对应关系，但每个概念必须作具体说明.如果不作具体说明，则剩下的只是M中的符号a，在$*M$中变成$*a$，而$*a$的含义是什么就不清楚了.这样，就很难用这种理论去解决具体问题.

本书的一个重要内容就是系统地把M中的主要概念和定理比较准确地（半形化地）说出来，由公设(5,2)变成$*M$的概念和定理，并且它们的具体含义也同时得到了比较准确的说明。然后在M_2研究是否具有同样的概念和定理，以进行比较，求得概念准确.

用通俗的话来讲，由M到$*M$是一个理论的翻译工作，而公设(5,2)则是一个翻译的原则.仅有原则是不够的，必须把主要概念翻译出来，并且有足够多的翻译实例才能使读者对$*M$有清晰的轮廓.这是本书的一个方面.另一方面，由$*M$到M_2必须进行理论上的比较，(6,1)就是一个理论比较的原则.同样，仅仅有原则是不够的，必须把主要概念作出比较，并且有足够多的比较的实例才能使读者分清$*M$和M_2的异同.当然，对少数逻辑能力很强的读者，这些是不必要的.

现在逐步地比较准确地写出M中定积分的定义.

关于分割的定义.若$q_1<q_2$，$n\in N$，则定义

(22,1) p是区间$[q_1,q_2]$的n步分割$\longleftrightarrow p$是N到R的升函数$\wedge p(1)=q_1 \wedge p(n+1)=q_2$.

关于步长的定义.若p是区间$[q_1,q_2]$的n步分割，对每个$i\in N$，我们定义

(22,2) $\Delta p_i = p(i+1)-p(i)$,

称Δp_i为分割p的第i个步长.

关于最大步长的定义.若p是区间$[q_1,q_2]$的n步分割，我们定义

(22,3) $\Delta_p = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta p_i$,

称Δp是分割p的最大步长.

关于点的选取的定义. 若x是区间$[q_1,q_2]$的n步分割，我们定义

(22,4) ξ是分割x的一个选取$\longleftrightarrow \xi\in \mathrm{ft}(N,R)\wedge(\forall i)[i\in N\longrightarrow x(i)\leqslant\xi(i)\leqslant x(i+1)]$.

关于黎曼(Riemann)积分的定义. 设$q_1<q_2$, $s\in R$和$\varphi\in\mathrm{ft}([q_1,q_2],R)$,我们定义

(22,5) $s=\int_{q_2}^{q_2}\varphi(t)dt\longleftrightarrow(\forall\varepsilon)[\varepsilon>0\longrightarrow(\exists\delta)[\delta>0\wedge(\forall n)(\forall x)(\forall\xi)[x$是区间$[[q_1,q_2]$的$n$步分割$\wedge\xi$是分割$x$的一个选取$\wedge\Delta_x<\delta\longrightarrow \left|\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi(\xi(i))\Delta x_i - s\right|<\varepsilon]]]$.

进一步，若$q_1<q_2$和$\varphi\in\mathrm{ft}([q_1,q_2],R)$,我们定义

(22,6) φ在区间$[q_1,q_2]$黎曼可积$\longleftrightarrow$

$(\exists s)[s=\int_{q_2}^{q_1}\varphi(t)dt]$.

因为定积分的概念是十分重要的，因此将它在$^*M$中的表达形式详细地写出来，以增强理解. 下面我们将由公设(5,2),

通过*——映射，我们将(22,1)至(22,6)转到$*M$中去.

关于分割的定义. 若$q_1<q_2$，$n\in *N$，定义

(22,7)　　*〔p是区间〔q_1,q_2〕的n步分割〕$\longleftrightarrow$*〔p是$*N$到$*R$的升函数〕$\wedge p(1)=1\wedge$ $p(n+1)=q_2$.

关于步长的定义. 若*〔p是区间〔q_1,q_2〕的n步分割〕，对每个$i\in *N$，我们定义

(22,8)　　$*\varDelta p_i=p(i+1)-p(i)$,

称$*\varDelta p_i$为分割p的第i个步长.

关于最大步长的定义. 若*〔p是区间〔q_1,q_2〕的n步分割〕我们定义

(22,9)　　$*\varDelta p=*\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}*\varDelta p_i$,

称$*\varDelta p$是分割p的最大步长.

关于点的选取（函数）的定义. 若*〔x是区间〔q_1,q_2〕的n步分割〕,我们定义

(22,10)　　*〔ξ是分割x的一个选取〕$\longleftrightarrow\xi\in *\mathrm{ft}(*N,*R)\wedge$ $(\forall i)$〔$i\in *N\longrightarrow x(i)\leqslant\xi(i)\leqslant x(i+1)$〕.

关于黎曼积分的定义. 设$q_1<q_2$，$s\in *R$和$\varphi\in\mathrm{ft}($〔q_1,q_2〕$,*R)$,我们定义

(22,11)　　$s=*\int_{q_1}^{q_2}\varphi(t)dt\longleftrightarrow(\forall\varepsilon)$〔$\varepsilon>0\longrightarrow(\exists\delta)$〔$\delta>0\wedge(\forall n)(\forall x)(\forall\xi)$〔*〔$x$是区间〔$q_1,q_2$〕的$n$步分割〕$\wedge$*〔$\xi$是分割$x$的一个选取〕$\wedge *\varDelta x<\delta$

$$\longrightarrow\left|*\sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi(i))*\varDelta x_i-s\right|<\varepsilon〕〕〕.$$

进一步，若$q_1<q_2$和$\varphi\in *\mathrm{ft}($〔q_1,q_2〕$,*R)$,我们定义

(22,12)　　*〔φ在区间〔q_1,q_2〕黎曼可积〕$\longleftrightarrow$

$$(\exists s)[S={}^*\int_{q_1}^{q_2}\varphi(t)dt].$$

在M有以下简单定理

(22,13) 若φ在区间$[q_1,q_2]$黎曼可积，则$|\varphi|$在$[q_1,q_2]$有上界。

由公设(5,2)，读者不难将(22,13)转到$^*M$去。

关于可积函数类，我们还是详细讲一下，关于连续函数的可积性，在M有以下定理

(22,14) 若$q_1<q_2$和$\varphi\in C([q_1,q_2])$，则φ在区间$[q_1,q_2]$黎曼可积。

此定理在$^*M$的表现形式为

(22,15) 若$q_1<q_2$和$\varphi\in{}^*C([q_1,q_2])$，则$^*[\varphi$在区间$[q_1,q_2]$黎曼可积$]$。

关于只在有限个点不连续的函数的可积性，在M有以下定理

(22,16) 若$q_1<q_2$，$n\in N$，$\varphi\in \mathrm{ft}([q_1,q_2],R)$，$|\varphi|$在$[q_1,q_2]$有上界，$p$是区间$[q_1,q_2]$的$n$步分割，又对任何$x$满足$q_1\leqslant x\leqslant q_2$，和对任何$i\in\{1,n+1\}$成立$x\neq p(i)$都有$\varphi$在点$x$连续，那么$\varphi$在区间$[q_1,q_2]$黎曼可积。

在$^*M$则成立以下定理

(22,17) 若$q_1<q_2$，$n\in{}^*N$，$\varphi\in{}^*\mathrm{ft}([q_1,q_2],{}^*R)$，$^*[|\varphi|$在$[q_1,q_2]$有上界$]$，$^*[p$是区间$[q_1,q_1]$的$n$步分割$]$，又对任何$x$满足$q_1\leqslant x\leqslant q_2$和对任何$i\in{}^*\{1,n+1\}$成立$x\neq p(i)$都有$^*[\varphi$在点$x$连续$]$，那么$^*[\varphi$在区间$[q_1,q_2]$黎曼可积$]$。

请注意，在(22,17)中$n\in{}^*N$，也就是说，在$^*M$中允许的间断数目是$^*N$中任意一个自然数，这个数可以是无限大。

关于单调函数的可积性，我们只在M作简单陈述如下

(22,18)　　若$q_1<q_2$，φ是$[q_1,q_2]$上的单调函数且$|\varphi|$在$[q_1,q_2]$有上界，则φ在区间$[q_1,q_2]$黎曼可积.

此式在$*M$的陈述，读者可自行写出.

另由φ在$[q_1,q_2]$黎曼可积可推得$|\varphi|$在$[q_1,q_2]$黎曼可积，这个在M和$*M$都成立. 还有若φ和ψ在$[q_1,q_2]$黎曼可积，C是常数，则$C\varphi$，$\varphi\pm\psi$和$\varphi\cdot\psi$都在$[q_1,q_2]$黎曼可积，并成立以下公式

(22,19)　　$$\int_{q_1}^{q_2} C\varphi(t)dt = C\int_{q_1}^{q_2}\varphi(t)dt$$

(22,20)　　$$\int_{q_1}^{q_2}[\varphi(t)\pm\psi(t)]dt = \int_{q_1}^{q_2}\varphi(t)dt \pm \int_{q_1}^{q_2}\psi(t)dt.$$

读者不难将以上性质在$*M$中表述出来并自由地加以运用.

关于函数在其定义域的子区间上的可积性，可推得在原来区间上的可积性，在M表述为以下定理

(22,22)　　若$q_1<q_1$，$n\in N$，p是区间$[q_1,q_2]$的n步分割，$\varphi\in \mathrm{ft}([q_1,q_2],R)$，且对任意$s\in|1,n|$成立$\varphi$在区间$[p(s),p(s+1)]$黎曼可积，则$\varphi$在区间$[q_1,q]_2$黎曼可积.

由公设(5,2)，上式在$*M$变为以下定理

(22,23)　　若$q_1<q_2$，$n\in *N$，$*[p$是区间$[q_1,q_2]$的n步分割$]$，$\varphi\subset *\mathrm{ft}([q_1,q_2],*R)$且对任意$s\in *|1,n|$成立$*[\varphi$在区间$[p(s),p(s+1)]$黎曼可积$]$，则$*[\varphi$在区间$[q_1,q_2]$黎曼可积$]$.

请特别注意，在(22,22)中，$n\in N$，即区间的分割是标准有限段，而在(22,23)中是$n\in *N$，即区间的分割是$*M$中的有限段，n可以是无限大.

两个函数如果只在有限个点上的函数值不同，则从一个的可积性可推得另一个的可积性，而且积分值相等，今在M表述

为以下定理

(22,24)　若$q_1<q_2$，$n\in N$，φ 和 $\psi\in \mathrm{ft}([q_1,q_2],R)$，$p$是区间$[q_1,q_2]$的$n$步分割，而且对任何$x\in[q_1,q_2]$，只要对任何$t\in|1,n+1|$成立$x\neq p(t)$就有$\psi(x)=\varphi(x)$，这样若$\varphi$在区间$[q_1,q_2]$黎曼可积，则可推得$\psi$在区间$[q_1,q_2]$黎曼可积，而且成立

$$\int_{q_1}^{q_2}\psi(x)dx=\int_{q_1}^{q_2}\varphi(x)dx.$$

读者不难将(22,24)转到$^*M$，并且同样要注意，这时是对$n\in{}^*N$，φ和ψ允许有n个点的函数值不同，而黎曼可积性不变。

关于定积分的定义，还须补充两点，在M中

(22,25)　若$q_1=q_2$，$\varphi\in \mathrm{ft}([q_1,q_2],R)$，我们规定

$$\int_{q_1}^{q_2}\varphi(x)dx=0;$$

和

(22,26)　若$q_1<q_2$，$\varphi\in \mathrm{ft}([q_1,q_2],R)$且$\varphi$在区间$[q_1,q_2]$黎曼可积，则定义

$$\int_{q_2}^{q_1}\varphi(x)dx=-\int_{q_1}^{q_2}\varphi(x)dx.$$

由公设(5,2)可以把以上两点转为$^*M$中的定义。

以上是关于定积分的定义及其简单性质。

§23　定积分的重要性质

本节着重论述定积分的几个重要性质，首先涉及的是有关积分估值的中值公式。定积分第一中值定理在M的表达形式为

(23,1)　若$q_1<q_2$，φ和$\psi\in \mathrm{ft}([q_1,q_2],R)$，$\varphi$和$\psi$在区间$[q_1,q_2]$黎曼可积，而且对任何的$x\in[q_1,q_2]$成立$m\leqslant\varphi(x)\leqslant M$和$\psi(x)\geqslant 0$，则存在$\mu$满足$m\leqslant\mu\leqslant M$而且

$$\int_{q_1}^{q_2} \varphi(x)\psi(x)dx = \mu \int_{q_1}^{q_2} \psi(x)\,dx.$$

由于这是一个十分重要的定理，所以我们通过 公设(5,2) 把它转到$*M$，并且把具体表示写出来

(23,2)　　若$q_1<q_2$，φ和$\psi\in *\mathrm{ft}([q_1,q_2),*R)$，$*[\varphi$ 和ψ 在区间$[q_1,q_2]$黎曼可积]，而且对任何的$x\in[q_1,q_2]$成立$m\leqslant\varphi(x)\leqslant M$和$\psi(x)\geqslant 0$，则存在$\mu$满足$m\leqslant\mu\leqslant M$而且

$$*\int_{q_1}^{q_2} \varphi(x)\psi(x)dx = \mu *\int_{q_1}^{q_2} \psi(x)\,dx.$$

以下讨论积分第二中值定理。为此，在M，$*M$和M_2我们把升函数，降函数，非降函数和非升函数这四种函数统称之为单调函数，又把两个单调函数之差称为有界变化函数。这样，第二中值定理在M的表述如下：

(23,3)　　若$q_1<q_2$，φ和$\psi\in\mathrm{ft}([q_1,q_2],R)$，$\varphi$ 和ψ在 区间$[q_1,q_2]$黎曼可积，又设φ是$[q_1,q_2]$上的有界变化函数，则存在ξ满足$q_1\leqslant\xi\leqslant q_2$而且成立

$$\int_{q_1}^{q_2} \varphi(x)\psi(x)dx$$

$$=\varphi(q_{1+})\int_{q_1}^{\xi} \psi(x)dx + \varphi(q_{2-})\int_{\xi}^{q_2} \psi(x)\,dx,,$$

其中　$\varphi(q_{1+}) = \lim\limits_{x\to q_{1+}}\varphi(x)$

$$\varphi(q_{2-}) = \lim_{x\to q_{2-}}\varphi(x).$$

我们现在通过公设(5,2)，把这个重要定理在$*M$的表示写出来

(23,4)　　若$q_1<q_2$，φ和$\psi\in *\mathrm{ft}([q_1,q_2],*R)$，$*[\varphi$ 和 ψ在区间$[q_1,q_2]$黎曼可积]．又设$*[\varphi$是$[q_1,q_2]$上的有界变化函数]，则存在ξ满足$q_1\leqslant\xi\leqslant q_2$，而且成立

$$*\int_{q_1}^{q_2}\varphi(x)\psi(x)dx$$

$$=\varphi(q_{1+})*\int_{q_1}^{\xi}\psi(x)dx+\varphi(q_{2-})*\int_{\xi}^{q_2}\psi(x)dx$$

其中$\varphi(q_{1+})={}^*\lim\limits_{x\to q_{1+}}\varphi(x)$,

$\varphi(q_{2-})={}^*\lim\limits_{x\to q_{2-}}\varphi(x)$.

关于定积分和不分积分的联系，有以下的微积分的基本定理，在M有以下表示

(23,5) 若$q<x_1$，$\varphi\in \mathrm{ft}([q,x_1],R)$，$\varphi$在区间$[q,x_1]$黎曼可积，定义

$\Phi(x)=\int_q^x\varphi(t)dt$，其中$x\in[q_1x_1]$，那么$\Phi\in C([q,x_1])$；而且对任何$t\in[q,x_1]$使得$\varphi$在点$t$连续，则$\Phi$在点$t$可导并成立$\Phi'(t)=\varphi(t)$；又如果$\varphi\in C([q,x_1])$，则$\Phi$是$\varphi$在区间$[q,x_1]$的反导数；最后，如果$\Psi$是$\varphi$在$[q,x_1]$的任意反导数，则

$\Phi(x)=\int_q^x\varphi(t)dt=\Psi(x)-\Psi(q)$，这里$x\in[q,x_1]$.

由于这是微积分学的基本定理，所以我们必须具体写出它在$*M$的表示．由公设(5,2)，把(23,5)转到$*M$得

(23,6) 若$q<x_1$，$\varphi\in *\mathrm{ft}([q,x_1],*R)$，$*$[$\varphi$在区间$[q,x_1]$黎曼可积]，定义

$\Phi(x)=*\int_q^x\varphi(t)dt$，其中$x\in[q,x_1]$，那么$\Phi\in C([q,x_1])$；而且对任何$t\in[q,x_1]$使得$*$[$\varphi$在点$t$连续]，则$*$[$\Phi$在点$t$可导]并成立$\Phi^{*\prime}(t)=\varphi(t)$；

又如果$\varphi \in {}^*C(q,x_1))$则*[$\Phi$是$\varphi$在$[q,x_1]$的反导数]；最后如果*[$\Psi$是$\varphi$在$[q,x_1]$的任意反导数]，则

$$\Phi(x) = {}^*\int_q^x \varphi(t)dt = \Psi(x) - \Psi(q)$$，这里$x \in [q, x_1]$.

分部积分公式是微积分学中的重要公式，在标准分析M中它的表示如下

(23,7)　　若$q_1 < q_2$，φ和$\psi \in C([q_1,q_2])$，φ和ψ在区间$[q_1, q_2]$可导，而且φ'和$\psi' \in C([q_1,q_2])$，那么成立以下公式

$$\int_{q_1}^{q_2} \varphi(t)\psi'(t)dt$$
$$= \varphi(q_2)\psi(q_2) - \varphi(q_1)\psi(q_1)$$
$$- \int_{q_2}^{q_1} \varphi'(t)\psi(t)dt.$$

由公设(5,2)，分部积分公式在${}^*M$的表述如下

(23,8)　　若$q_1 < q_2$，φ和$\psi \in {}^*C([q_1,q_2])$，*[$\varphi$和$\psi$在区间$[q_1,q_2]$可导]而且$\varphi^{*\prime}$和$\psi^{*\prime} \in {}^*C([q_1,q_3])$那么成立以下公式

$${}^*\int_{q_2}^{q_1} \varphi(t)\psi^{*\prime}(t)dt$$
$$= \varphi(q_2)\psi(q_2) - \varphi(q_1)\psi(q_1)$$
$$- {}^*\int_{q_2}^{q_1} \varphi^{*\prime}(t)\psi(t)dt)$$

换元积分公式在标准分析M的表示如下

(23,9)　　若$q_1 < q_2$和$p_1 < p_2$，$\psi \in C([q_1,q_2])$，$\varphi \in \mathrm{ft}([p_1, p_2], [q_1,q_2])$，$\varphi(p_1) = q_1$，$\varphi(p_2) = q_2$，$\varphi' \in C([p_1, p_2])$，那么成立

$$\int_{q_1}^{q_2}\psi(t)dt=\int_{p_1}^{p_2}\psi(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

由公设(5,2)可得$*M$的换元积分公式如下

(23,10)　若$q_1<q_2$和$p_1<p_2$，$\psi\in *C([q_1,q_2])$，

$\varphi\in *\mathrm{ft}([p_1,p_2],[q_1,q_2])$，

$\varphi(p_1)=q_1$，$\varphi(p_2)=q_2$，

$\varphi^{*\prime}\in *C([p_1,p_2])$，那么成立

$$*\int_{q_1}^{q_2}\psi(t)dt=*\int_{p_1}^{p_2}\psi(\varphi(t))\varphi^{*\prime}(t)dt.$$

在标准分析中，泰勒（Taylor）公式可表述如下

(23,11)　若$q_1<q_2$，$n\in N$，$\varphi\in C([q_1,q_2])$，且φ在区间$[q_1,q_2]$有$n+1$阶连续导数，则成立以下公式：

$$\varphi(q_2)=\varphi(q_1)+\varphi'(q_1)(q_2-q_1)+\cdots+\frac{\varphi^{(n)}(q_1)}{n!}(q_2-q_1)^n+\frac{1}{n!}\int_{q_1}^{q_2}\varphi^{(n+1)}(t)(q_2-t)^n dt.$$

由公设(5,2)，它在$*M$的表述如下

(23,12)　若$q_1<q_2$，$n\in *N$，$\varphi\in *C([q_1,q_2])$，$*$〔φ在区间$[q_1,q_2]$有$n+1$阶连续导数〕，则成立以下公式

$$\varphi(q_2)=\varphi(q_1)+\varphi^{*\prime}(q_1)(q_2-q_1)+\cdots+\frac{\varphi^{*(n)}(q_1)}{n*!}(q_2-q_1)^n+\frac{1}{n*!}*\int_{q_1}^{q_2}\varphi^{*(n+1)}(t)(q_2-t)^n dt.$$

§24　第二相内函数转化为第一相函数的两个定理

第二相内函数即$*M$的函数，第一相函数即M的函数.满足

某些条件的$*M$的函数可以诱导出相应的M中的函数.这一点很重要，因为有了这个桥梁就可以把M_2中的内容转到M中来.

象这样的转化定理才是M_2的核心内容.

首先介绍如下的定理

(24,1) 设1. $a, b\in R$且$a<b$;

2. $g\in *\mathrm{ft}([*a, *b], *R)$ 且对任何$y\in[*a, *b]$成立$g(y)$是有限数;

3. 对任何x和α满足$x\in[*a, *b]$, $x+\alpha\in[*a, *b]$和α是无限小，则成立$g(x+\alpha)-g(x)$是无限小;

4. $f\in\mathrm{ft}([a, b], R)$, 且对任何$x\in[a, b]$成立

$$f(x)=\mathrm{st}(g(*x)),$$

则可推得$f\in C([a, b])$且对任何$y\in[*a, *b]$成立

$*f(y)-g(y)$是无限小.

这个定理是在$*M$的函数g上加了一些M_2中的条件就诱导出了M的函数f.

证明.首先证明前面一个结论.用反证法.若$f\notin C([a,b])$, 则存在$h\in[a, b]$, $f(x)$在点h不连续，即存在$\varepsilon>0$ 和 $A\in\mathrm{ft}(N, [a,b])$并使得

$$\lim_{n\to\infty}A(n)=h \tag{24,2}$$

和对任何$n\in N$成立

$$|f(A(n))-f(h)|\geqslant 2\varepsilon. \tag{24,3}$$

由公设(5,2)，将上式转到$*M$，则对任何$n\in *N$成立

$$|*f(*A(n))-*f(*h)|\geqslant 2*\varepsilon. \tag{24,4}$$

由于N_1是$*N$的子集，所对任何$n\in N_1$成立

$$|g(*A(n))-g(*h)|\geqslant *\varepsilon. \tag{24,5}$$

现在在$*M$定义集合B，$B\sqsubset *N$，具体含义是

(24,6)　　$n\in B\longleftrightarrow |g(*A(n))-g(*h)|\geqslant *\varepsilon$.

由（24,5）和（24,6）不难看出$N_1\sqsubset B$.由于N_1不是$*M$的集合，B是$*M$的集合，故N_1不会与B相等.由此推得存在$n_1\in B$且$n_1\notin N_1$(故n_1是正无限大）使得

(24,7)　　$|g(*A(n_1))-g(*h)|\geqslant *\varepsilon$.

但由（16,36）和（24,2）可得$*A(n_1)-*h$是无限小，故由第3的条件得

(24,8)　　$g(*\mathrm{A}(n_1)-g(*h)$是无限小.因而与(24,8)矛盾.故$f\in C([a,b])$。

现在证明后面一个结论.

取任意的$x\in[a,b]$和任意的$y\in \mathrm{mon}(*x)$且$y\in[*a,\ *b]$，那么成立不等式

(24,9)　　$|*f(y)-g(y)|\leqslant|*f(y)-*f(*x)|$
$+|*f(*x)-g(*x)|+|g(*x)-g(y)|$.

由于$f\in C([a,b])$和(16,33)可推得

(24,10)　　$|*f(y)-*f(x)|$是无限小.

由第4个条件可推得

(24,11)　　$|*f(*x)-g(*x)|$是无限小.

由第3个条件可推得

(24,12)　　$|g(*x)-g(y)|$是无限小.

故由(24,9)，(24,10)，(24,11)和(24,12)推得对任何$y\in[*a,\ *b]$成立

(24,13)　　$*f(y)-g(y)$是无限小.

定理（24,1）证完.

现在介绍M_2中的另一定理

(24,14)　　设1. $a,\ b\in R$且$a<b$;

2. $g\in *\mathrm{ft}([*a,\ *b],\ *R)$且对任何$y\in$

$[{}^*a,\ {}^*b]$都有$g(y)$是有限数；

3. $f\in \mathrm{ft}([a,\ b],\ R)$且对任何$x\in[a,b]$成立
   $f(x)=\mathrm{st}(g({}^*x))$；

4. $^*[g$在区间$[{}^*a,\ {}^*b]$ 可 导 且 $g^{*\prime}\ \in {}^*C$
   $([{}^*a,\ {}^*b])$；

5. 对任何$y\in[{}^*a,\ {}^*b]$成立
   $g^{*\prime}(y)$是 有 限数；

6. 对任何y和α只要满足$y\in[{}^*a,\ {}^*b]$，$y+\alpha\in[{}^*a,\ {}^*b]$和$\alpha$是无限小，则成立
   $g^{*\prime}(x+\alpha)-g^{*\prime}(x)$是无限小；

7. 定义$f_1\in \mathrm{ft}([a,\ b],\ R)$，它的具体表示为
   $f_1(x)=\mathrm{st}(g^{*\prime}({}^*x))$，$x\in[a,b]$；
   那么对任何$x\in[a,b]$成立
   $f'(x)=f_1(x)$.

本定理是由${}^*M$的可导函数g，在满足M_2中某些条件时就导出了M中的可导函数f.

证明：由定理(24,1)知$f_1\in C([a,b])$.

令

(24,15) $$f_2(x)=\int_a^x f_1(t)dt+f(a),$$

则$f_2\in C([a,b])$和$f'_2(x)=f_1(x)$.

又由本定理的假设4)和微积分学基本定理(23,6)可得

(24,16) $$g(y)={}^*\int_{{}^*a}^{y} g^{*\prime}(t)dt+g({}^*a).$$

用公设(5,2)将(24,15)转到${}^*M$得

(21,17) $${}^*f_2(y)={}^*\int_{{}^*a}^{y} {}^*f_1(t)dt+{}^*f({}^*a).$$

由(24,17)减去(24,16)得

(24,18) $${}^*f_2(y)-g(y)={}^*f({}^*a)-g({}^*a)$$

$$+ {}^*\int_{*a}^{y} [{}^*f_1(t) - g^{*\prime}(t)]dt.$$

由定理(24,1)知

(24,19) $\quad {}^*f_1(t) - g^{*\prime}(t)$是无限小.

由本定理的第3条件得${}^*f({}^*a) - g({}^*a)$是无限小.故由(24,18)可推得

(24,20) $\quad {}^*f_2(y) - g(y)$是无限小.

再者，我们有估计式

(24,21)
$$\begin{aligned} &|g(y+\alpha) - g(y)| \\ &\leqslant |g(y+\alpha) - {}^*f_2(y+\alpha)| \\ &+ |{}^*f_2(y+\alpha) - {}^*f_2(y)| + |{}^*f_2(y) \\ &- g(y)|. \end{aligned}$$

利用(24,20)知

(24,22) $\quad |g(y+\alpha) - {}^*f_2(y+\alpha)|$是无限小,

(24,23) $\quad |{}^*f_2(y) - g(y)|$是无限小.

由(24,15)易知$f_2 \in C([a,b])$，故当α是无限小时成立

(24,24) $\quad |{}^*f_2(y+\alpha) - {}^*f_2(y)|$是无限小.

综合(24,21)至(24,24)的讨论，我们得以下结论

(24,25) 对任何y和α，只要$y \in [{}^*a, {}^*b]$, $y+\alpha \in [{}^*a, {}^*b]$和$\alpha$是无限小则成立$g(y+\alpha) - g(y)$是无限小.

这样，由定理(24,1)知$f \in C([a,b])$和

(24,26) $\quad {}^*f(y) - g(y)$是无限小.

由(24,20)和(24,26)知

(24,27) $\quad {}^*f_2(y) - {}^*f(y)$是无限小.

由于f_2和f都是标准函数，因此在M成立

(24,28) $\quad f(x) = f_2(x), \quad x \in [a,b]$.

注意到(24,15)我们有$f'(x) = f_1(x)$.定理(24,14)证完.

§25 标准函数在标准区间上的定积分

本节讨论的中心问题是把M中的定积分通过$*M$中的有限和来表示。

在M有以下定理

(25,1) 若$b_1<b_2$，g在区间$[b_1,b_2]$黎曼可积，又$I=\int_{b_1}^{b_2}g(t)dt$，则成立以下结论：

$(\forall\varepsilon)[\varepsilon>0\longrightarrow(\exists\delta)[\delta>0\wedge(\forall n)(\forall x)(\forall\xi)$ $[x$是区间$[b_1,b_2]$的n步分割$\wedge\xi$是分割x的一个选取$\wedge\Delta_x<\delta\longrightarrow$

$\left|\sum_{i=1}^{n}g(\xi(i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon]]]$。

由(22,5)和(22,6)不难看出(25,1)是正确的。

与(16,33)类似，在M_2有以下定理

(25,2) 若$b_1<b_2$，g在区间$[b_1,b_2]$黎曼可积，又$I=\int_{b_1}^{b_2}g(t)dt$，则成立以下结论：

对任何n,x和ξ，$*[x$是区间$[b_1,b_2]$的n步分割$]$，$*[\xi$是分割x的一个选取$]$，只要$*\Delta_x$是正无限小，则成立$\mathrm{st}\left(*\sum_{i=1}^{n}*g(\xi(i))*\Delta x_i\right)$

$=I$。

这就是说，积分$\int_{b_1}^{b_2}g(t)dt$是$*M$中函数$*g$的$(*[$有限的$])$和

$$*\sum_{i=1}^{n}*g(\xi(i))*\Delta x_i$$

的标准部分。

如果分割是均匀的，则在M_2有以下定理

(25,3)　　若$b_1<b_2$，g在区间〔b_1, b_2〕黎曼可积，又$I=\int_{b_1}^{b_2} g(t)dt$；$n\in *N$且$n$是无限大，$*$〔$b_n$是区间〔$*b_1, *b_2$〕的$n$步分割〕，而且对任意$m\in\{1, n+1\}$成立$b_n(m)=*b_1+\frac{*b_2-*b_1}{n}(m-1)$；又设$\xi_n$是分割$b_n$的一个选取，则成立以下结论：

$*\Delta_{bn}=\frac{*b_2-*b_1}{n}$，$\frac{*b_2-*b_1}{n}$是无限小，而且$\mathrm{st}\left(*\sum_{i=1}^{n} *g(\xi_n(i))\ *\Delta_{bn}\right)=I$.

这就是说，在均匀分割的条件下，只要分割的步数n是$*N$中的无限大，M中的积分就可以用$*M$中的（$*$〔有限的〕）和来表示。

第五章　初等函数及其图象

通过二、三、四章的讨论，我们把微积分学的基本概念和结论在M，$*M$和M_2中的异同进行了比较分析，现在我们对$*M$和M_2有些大致的轮廓了.但是我们对标准分析的了解，除了基本概念之外，就是对很多具体函数的分析表示和几何图象进行了深入的研究．由于把基本概念和具体函数的研究互相结合，才使得标准分析丰富多彩．如同演戏一样，有了舞台还要有演员，初等函数就是我们的第一批演员．本章的主要目的是研究$*M$中的初等函数及其图象，特别是从M_2中无限大和无限小的观点，来考察这些图象的特点．这些图象的确有些令人深思之处．

作为一个附带的收获，通过对初等函数的图象分析，对引入了无限大和无限小之后的空间形式的特点也有了一定的了解．

不少朋友对单子（或星系）的边界很有兴趣，作者在§30中作了讨论．

§26　指数函数和对数函数

我们知道，在M中指数函数以e^x来表示，那么按照公设（5.2）的规定，在$*M$中可以$*(e^x)$表示指数函数.但仅仅这样从符号上加以区分是不够的，我们必须给出一种具体的解释，使符合于学过标准分析的读者的习惯和直觉．

1.首先研究数e　在M中数e的一种定义方式是

$$(26,1)\qquad e=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}.$$

由公设(5,2)，通过 * ——映射，在 * M 中数 * e的定义可表为

$$(26,2)\qquad *e= *\lim_{n\to *\infty} *\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i*!}.$$

在 (26,2)中，右端符号“$*\lim\limits_{n\to *\infty}$”在§15作了解释，“$*\sum$”和“*!”在§10作了解释，因此它的左端的数*$e$也就有了明确的定义.

2.指数函数　在M中指数函数的一种定义为

$$(26,3)\qquad e^x=\exp(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{x^n}{j!}.$$

由公设(5,2)，通过 * ——映射，在*M中相应的定义为

$$(26,4)\qquad *(e^x)=*\exp(x)$$

$$= *\lim_{n\to *\infty} *\sum_{i=0}^{n}\frac{*(x^n)}{j*!}.$$

在 (26,4) 的右端，符号 * (x^n)已在§10解释过， 其它符号含义与(26,2)相同，因此它的左端也就有了定义.

3.对数函数　在M中对数函数可定义为指数函数的反函数，即

$$(26,5)\qquad y=\ln x\longleftrightarrow x=\exp(y).$$

用公设(5,2)，在*M中对数函数可定义为

$$(26,6)\qquad y=*\ln x\longleftrightarrow x=*\exp(y).$$

由于符号“*exp”在(26,4)中作了解释，所以 (26,6) 的左端有明确定义.

4.任意底数的指数函数和对数函数　在M中设 $t>0$ 和$t\neq 1$，我们可以引进以下两个定义

$$(26,7)\qquad t^x=\exp(x\ln t)$$

(26,8) $\log_t x = \dfrac{\ln x}{\ln t}$.

通过公设(5,2)，在*M中相应的两个定义是

(26,9) $*(t^x) = *\exp(x * \ln t)$

(26,10) $*\log_t x = \dfrac{*\ln x}{*\ln t}$.

5.导数和不定积分公式 关于指数函数和对数函数的导数和不定积分在M有以下简单公式

(26,11) $\exp'(x) = \exp(x)$,

(26,12) 若$x>0$，$\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$,

(26,13) $\int \exp(x)dx = \exp(x) + C$,

(26,14) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln x + C$.

通过公设(5,2)，在*M相应的导数和积分公式如下

(26,15) $*\exp^{*\prime}(x) = *\exp(x)$,

(26,16) 若$x>0$，$*\ln^{*\prime}(x) = \dfrac{1}{x}$,

(26,17) $*\int *\exp(x)dx = *\exp(x) + C$,

(26,18) $*\int \dfrac{dx}{x} = *\ln x + C$.

(26,15) 至 (26,18) 是*M中最初等的求导公式和积分公式，熟悉一下这些符号和公式是有好处的.

注意：(26,13)和(26,14)右端的常数C是R中的任意数，(26,17)和(26,18)右端的常数C是*R中的任意数.

§27 双曲函数和幂函数

在讨论了指数函数之后，就很容易定义双曲函数和幂函数了。因为它们是基本的初等函数，所以花一定的篇幅来叙述。

1.双曲函数　在M中双曲函数可以通过指数函数定义如下

$$(27,1)\qquad \mathrm{ch}(x)=\frac{1}{2}\{\exp(x)+\exp(-x)\},$$

$$(27,2)\qquad \mathrm{sh}(x)=\frac{1}{2}\{\exp(x)-\exp(-x)\}.$$

而且成立以下的导数和积分公式

$$(27,3)\qquad \mathrm{ch}'(x)=\mathrm{sh}(x).$$

$$(27,4)\qquad \mathrm{sh}'(x)=\mathrm{ch}(x).$$

$$(27,5)\qquad \int \mathrm{sh}(x)dx=\mathrm{ch}(x)+C.$$

$$(27,6)\qquad \int \mathrm{ch}(x)dx=\mathrm{sh}(x)+C.$$

在(27,5)和(27,6)中C是R中的任意常数.

由公设(5,2)，把上述六式转到$*M$，首先得到$*M$中关于双曲函数的定义

$$(27,7)\qquad *\mathrm{ch}(x)=\frac{1}{2}\{*\exp(x)+*\exp(-x)\},$$

$$(27,8)\qquad *\mathrm{sh}(x)=\frac{1}{2}\{*\exp(x)-*\exp(-x)\},$$

以及相应的导数公式和积分公式

$$(27,9)\qquad *\mathrm{ch}^{*\prime}(x)=*\mathrm{sh}(x),$$

$$(27,10)\qquad *\mathrm{sh}^{*\prime}(x)=*\mathrm{ch}(x),$$

$$(27,11)\qquad *\int *\mathrm{sh}(x)dx=*\mathrm{ch}(x)+C,$$

$$(27,12)\qquad *\int *\mathrm{ch}(x)dx=*\mathrm{sh}(x)+C.$$

在(27,11)和(27,12)中C是$*R$中的任意常数.

2.幂函数　请回顾(26,7)和(26,9)，通过指数函数我们在$t>0$时，在M定义了函数t^x，在$*M$定义了函数$*(t^x)$.现在作为幂函数研究时，我们必须换一下变量的符号，写成以下形式.在M中幂函数为

(27,13)　　x^α，其中$x>0$，$\alpha\in R$.

在$*M$幂函数则为

(27,14)　　$*(x^\alpha)$，其中$x>0$，$\alpha\in *R$.

相应的导数公式为

(27,15)　　$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$

(27,16)　　$*(x^\alpha)^{*\prime}=\alpha *(x^{\alpha-1})$.

当$\alpha\neq-1$时，成立以下积分公式

(27,17)　　$\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$,

(27.18)　　$*\int *(x^\alpha)dx=\frac{*(x^{\alpha+1})}{\alpha+1}+C$.

在(27,17)中$C\in R$，在(27,18)中$C\in *R$.

§28　多项式和有理式

多项式和有理式是最重要的初等函数，为了说清它们的性质，我们以$\mathbb{C}$表示复平面.

1.多项式　在M中n次（$n\in N$）多项式的表示为

(28,1)　　$P_n(x)=\sum_{m=0}^{n}a(m)x^m$,

其中$a\in$ ft（非负整数集I_+，$\mathbb{C}$）且$a(n)\neq0$.请注意，这里a是任意的，变量$x\in\mathbb{C}$.由公设(5,2)，将上式转到$*M$，$n(n\in *N)$次多项式的定义为

(28,2) $$P_n(x) = * \sum_{m=0}^{n} a(m) * (x^m),$$

其中$a \in *\mathrm{ft}(*I_+, *\mathbb{C})$且$a(n) \neq 0$，这里$a$是任意的（实际上是变量），变量$x \in *\mathbb{C}$.

由(27,15)和(27,16)我们可以得到导数公式

(28,3) $$P'_n(x) = \sum_{m=1}^{n} m a(m) x^{m-1},$$

(28,4) $$P_n^{*\prime}(x) = * \sum_{m=1}^{n} m a(m) * (x^{m-1}).$$

由(27,17)和(27,18)得积分公式

(28,5) $$\int P_n(x) dx = \sum_{m=0}^{n} \frac{a(m)}{m+1} x^{m+1} + C,$$

(28,6) $$* \int P_n(x) dx = * \sum_{m=0}^{n} \frac{a(m)}{m+1} * (x^{m+1}) + C.$$

在(28,5)中$C \in R$，在(28,6)中$C \in *R$.

2.有理式　定义了多项式之后可以把有理式定义为两个多项式之商.在M若$R_n(x)$是n次多项式，$Q_m(x)$是m次多项式，n，$m \in N$，则

(28,7) $$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

是M中的有理式.

类似地，在$*M$若$P_n(x)$是n次多项式，$Q_m(x)$是m次多项式，n，$m \in *N$，则

(28,8) $$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

是$*M$的有理式.

3.关于多项式的根　在M有以下定理

(28,9)　若$n \in N$，$P_n(x)$是n次多项式，首项系数$a(n) = 1$，

则存在$\lambda \in \mathrm{ft}(|1,n|, \mathbb{C})$使得

$$P_n(x) = \prod_{j=1}^{n} (x-\lambda(j)).$$

由公设(5,2)，将上式转到$*M$，有以定理

(28,10)　若$n \in *N$，$P_n(x)$是n次多项式，首项系数$a(n) = 1$，则存在$\lambda \in *\mathrm{ft}(*|1,n|, *\mathbb{C})$使得

$$P_n(x) = *\prod_{j=1}^{n} (x-\lambda(j)).$$

注意，在(28,10)n可以是无限大.

§29 三 角 函 数

在标准分析中，余弦函数可定义为

(29,1)
$$\cos x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i}$$

在$*M$中，余弦函数可定义为

(29,2)
$$*\cos x = *\lim_{n\to+*\infty} * \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{(2i)^*!} x^{2i}.$$

在M中正弦函数可定义为

(29,3)
$$\sin x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1}.$$

在$*M$中正弦函数可定义为

(29,4)
$$*\sin x = *\lim_{n\to+*\infty} * \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{(2i+1)*!} x^{2i+1}.$$

在M中有以下简单的导数和积分公式

(29,5)　$\cos' x = -\sin x,$

(29,6)　$\sin' x = \cos x,$

(29,7)　$\int \sin x dx = -\cos x + C,$

(29,8) $\int \cos x dx = \sin x + C$,

在(29,7)和(29,8)中$C \in R$.

用公设(5,2)，把以上四式翻译到$*M$有以下导数和积分公式

(29,9) $*\cos^{*\prime} x = -*\sin x$,

(29,10) $*\sin^{*\prime} x = *\cos x$,

(29,11) $*\int *\sin x dx = -*\cos x + C$,

(29,12) $*\int *\cos x dx = *\sin x + C$,

在(29,11)和 (29,12)中$C \in *R$.

至于三角函数的其它内容可以类似地讨论.

§30 分层坐标系和狄特金分划

到上节为止，我们已把M，$*M$和M_2中主要的分析概念进行了讨论和比较，又把最重要的初等函数在M和$*M$的表示写了出来.现在，我们对两相微积分的面貌已经比较具体了.

从本节开始，我们讨论一下M_2中函数的几何图象，或者说是讨论在引入了无限大和无限小之后的空间形式，而通讨论简单函数的图象将这样的空间形式的特点表示出来.

首先在M_2引入以下两个定义

(30,1) 若$x \in *R$，$b \in *R$且$b > *o$，称y属于以x为中心和以b为单位的星系，记作

$$y \in \mathrm{gal}(x,b),$$

如果存在$n \in N$使得$|y-x| < nb$.

(30,2) 若$x \in *R$，$b \in *R$且$b > *o$，称y属于以x为中心和以b为单位的原子，记作

$$y \in \mathrm{atom}(x,b),$$

如果对任何$n\in N$成立$|y-x|<\frac{b}{n}$.

以下建立分层坐标系.

首先在直线l上取原点o，规定正方向ox，然后在正方向ox上取点b_0，并以ob_0为单位建立坐标系$\{ox, b_0\}$.

请注意，现在我们的直线l代表$^*R$，即为第二相的实数线.我们在o与b_0之间取点b使得$ob/ob_0>o$，以ob为单位可建立另一坐标系$\{o\xi, b\}$，特别使人感兴趣的是当

(30,3)　　ob/ob_0是无限小.

进一步，我们可以在b_0的正方向上取点B满足$ob_0/oB>o$，以oB为单位建立坐标系$\{oX, B\}$，特别有兴趣的是当

(30,4)　　ob_0/oB是无限小.

这样，$\{o\xi, b\}$，$\{ox, b_0\}$和$\{oX, B\}$就构成了三层的分层坐标系。特别当(30,3)和(30,4)成立时就构成了具无限比值的三层坐标系，我们以下面的图形表示.

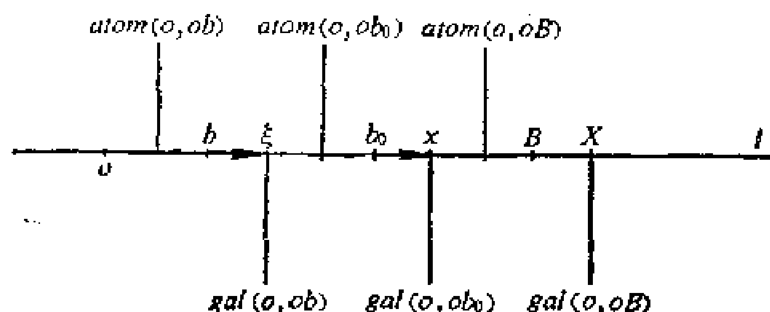


图 (30,5)

在图(30,5)上，相对于原点o而言，对于每个单位，既有一个原子，也有一个星系，如atom(o, ob)表示以o为中心和以ob为单位的原子，gal(o, ob)表示以o为中心和以ob为单位的星系，atom(o, ob_0)表示以o为中心和以ob_0为单位的原子，gal(o, ob_0)表示以o为中心和以ob_0为单位的星系，等等。

注意1　gal(o, ob)是atom(o, ob_0)的真子集，atom(o, ob_0)

是$\mathrm{gal}(o, ob_0)$的真子集，$\mathrm{gal}(o, ob_0)$是$\mathrm{atom}(o, oB)$的真子集，等等。

注意2　如果以$\mathscr{B}$表示$\mathrm{gal}(o, ob)$的上界所组成的集合，又令$\mathscr{A} = {}^*R \backslash \mathscr{B}$，则$\mathscr{A}$是一个有上界而无上确界的集合，$\mathscr{B}$是一个有下界而无下确界的集合。

现在要问：是否能补充一个新的数作为$\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$的分界，这样就可以使得$\mathscr{A}$有上确界（即$\mathrm{gal}(o, ob)$的正方向的边界）和$\mathscr{B}$有下确界，因而使得完备性公理仍然适用？但这样会引起新的困难。如果我们引入一个新的数γ表示$\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$的分界，则会破坏有关数的四则运算的法则和破坏有序域的公理。

例如由于γ是$\mathrm{gal}(o, ob)$的正边界，我们应规定$\gamma > 0$。另一方面，我们必须使它符合普通实数的性质，今阐述如下。

若a是实数，b是实数，又令

$$A = \{x \mid x \in R \wedge x < a\}$$
$$B = \{y \mid y \in R \wedge x < b\}$$
$$C = \{z \mid z = x + y \wedge x \in A \wedge y \in B\},$$

那么成立a是A的上确界，b是B的上确界和$a + b$是C的上确界。

当在${}^*R$上补充了γ之后，我们定义

$$\mathscr{X} = \{x \mid x \in {}^*R \wedge x < \gamma\}$$
$$\mathscr{P} = \{z \mid z = x + y \wedge x \in \mathscr{X} \wedge y \in \mathscr{X}\},$$

则应成立γ是$\mathscr{X}$的上确界和$\gamma + \gamma$是$\mathscr{P}$的上确界。另一方面，由定义得$\mathscr{X} = \mathscr{P}$，故$\gamma + \gamma = \gamma$。即成立$2\gamma = \gamma$。又由于$\gamma > 0$。故推得$2 = 1$。

以上说明，我们定义的这个新的数γ破坏了完备有序域的公理。

更广泛地，我们还可以提出下面这样的问题。狄特金曾经成功地通过有理数集Q的分划来定义标准实数线R，那么我们可不可以依样画葫芦，通过${}^*Q$的分划来定义${}^*R$呢？或者更进

一步地问：$^*Q$的分划会构成些什么呢？

类似地，我们把$^*Q$分为上下两组$\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$，即成立

(30,6)　　$^*Q=\mathscr{A}\bigcup\mathscr{B}$，$\mathscr{A}\bigcap\mathscr{B}=\phi$并对任意的$x\in\mathscr{A}$和$y\in\mathscr{B}$成立$x<y$。

我们称$\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$构成$^*Q$的分划，$\mathscr{A}$为下组，$\mathscr{B}$为上组。

那么，$^*Q$的分划可以分为两大类。

第1类：$\mathscr{A}$有最大或$\mathscr{B}$有最小有理数。

第2类：$\mathscr{A}$无最大同时$\mathscr{B}$无最小有理数。

仿照§12中关于$^*N$的N分解的讨论，关于第2类分划，我们有以下定理

(30,7)　　若$\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$构成$^*Q$的一个第2类分划，$\mathscr{A}$为下组，$\mathscr{B}$为上组，则$\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$可分解为$\mathscr{A}=\bigcup\limits_{n\in N}\mathscr{A}_n$，$\mathscr{B}=\bigcup\limits_{n\in N}\mathscr{B}_n$，其中$\{\mathscr{A}_n, n\in N\}$两两不相交，而且对任意$i<j$，$x\in\mathscr{A}_i$和$y\in\mathscr{A}_j$成立$x<y$；又$\{\mathscr{B}_n, n\in N\}$两两不相交，而且对任意的$i<j$，$x\in\mathscr{B}_i$和$y\in\mathscr{B}_j$成立$y<x$。

此定理的证明从略。

根据定理(30,7)，我们构造两个函数φ和ψ，$\varphi\in\mathrm{ft}_2(N,\mathscr{A})$，$\psi\in\mathrm{ft}_2(N,\mathscr{B})$。对每个$i\in N$，定义$\varphi(i)\in\mathscr{A}_i$和$\psi(i)\in\mathscr{B}_i$，那么$\varphi$是由$N$到$\mathscr{A}$的升函数，$\psi$是由$N$到$\mathscr{B}$的降函数。并且对任何$x\in\mathscr{A}$存在$i\in N$，使得$x<\varphi(i)$，又对任何$y\in\mathscr{B}$存在$j\in N$，使得$y>\psi(j)$。

根据上面的结果以及§12中关于$^*N$的N分解，进一步可以证明，存在函数p和q，M_2〔p是由N_2到$\mathscr{A}$的升函数〕，M_2〔q是由N_2到$\mathscr{B}$的降函数〕，并且对任何$x\in\mathscr{A}$存在$i\in N_2$使得$x<p(i)$，又对任何$y\in\mathscr{B}$存在$j\in N_2$使得$y>q(j)$。

现在令

(30,8) $$r=\bigcap_{n\in N_2}(p(n),q(n)).$$

不难看出以下等式

(30,9) $$*Q=\left(\bigcup_{n\in N_2}\{x|\ x<p(n)\}\right)\bigcup\left(\bigcup_{n\in N_2}\{x|\ x>q(n)\}\right).$$

由此可以看出，$*Q$存在一个第2类分划$\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$，则存在一个由（30,8）所表示的r，其中M_2〔p是由N_2到$*Q$的升函数〕，M_2〔q是N_2到$*Q$的降函数〕，使得（30,9）成立，而且有$p(n)<q(n)$.反之亦然.

在上一段的结论部所叙述的性质之外，如果进一步设（30,8）右端的p和q满足

(30,10) $$M_2\lim_{n\to\infty_2}(q(n)-p(n))=0,$$

则（30,8）中的r是M_2中的预备数.如果（30,10）不成立，则称r是$*Q$的纯分划.

这样，有理数集$*Q$的分划可以如下分类

(30,11) $*Q$的分划
- 纯分划
- 预备数
  - ?（是否存在$*R$的第二类分划）.
  - $*R$的数.

显然，纯分划中包括了星系和原子的边界.如果把纯分划作为数的新成员引入，可以保持数的顺序性和数集的完备性（有上界则有上确界），但会破坏有关数的四则运算的法则，这样的新数系将不再满足有序域的全部公理，这对于微积分学的构成将带来极大的困难.如上所述，将成立$\gamma+\gamma=\gamma$，于是减法和除法将成为不定型，导数就确定不了.如果不是为了微积分学而是为了其它的目的，不要求扩大后的数系成为有序

域，那就超出了本书的讨论范围。

至于 $*R$ 与 M_2 的预备数的异同，本书并没有完全搞清楚，在（30,11）中打了一个大问号。

最后，我们再来明确一下。如果我们把 $*Q$ 的所有分划当作新的数系，则四则运算的规律会遭到破坏，新的数系不会构成一个有序域。为了保持新的数系是一个有序域，我们不得不把纯分划去掉，从而只剩下了 M_2 的预备数，它们构成有序域，但破坏了完备性公理。为了在某种意义上保证完备性公理成立，我们不得不把预备数的范围进一步缩小到 $*R$，它是预备数的子集。$*R$ 则是我们构成扩大的微积分学的个体域。但是仅仅限制个体还不够，还须限制 $*R$ 上的各型关系（如集合，函数等），只有在 $*R$ 的内关系上才能建立起（与标准分析理论结构相同的）完整的微积分学。

这种限制相当复杂，所以从莱布尼茨开始经过了三百多年才由鲁滨逊完成。

因为有些朋友对星系和原子的边界很有兴趣，所以作者特别在此发表了自己粗浅的看法。至于对 $*Q$ 全体分划所组成的集合的进一步研究作者认为已经超出了本书的目的和范围。

§31 在具无限比值的三层坐标系中的简单函数的图象

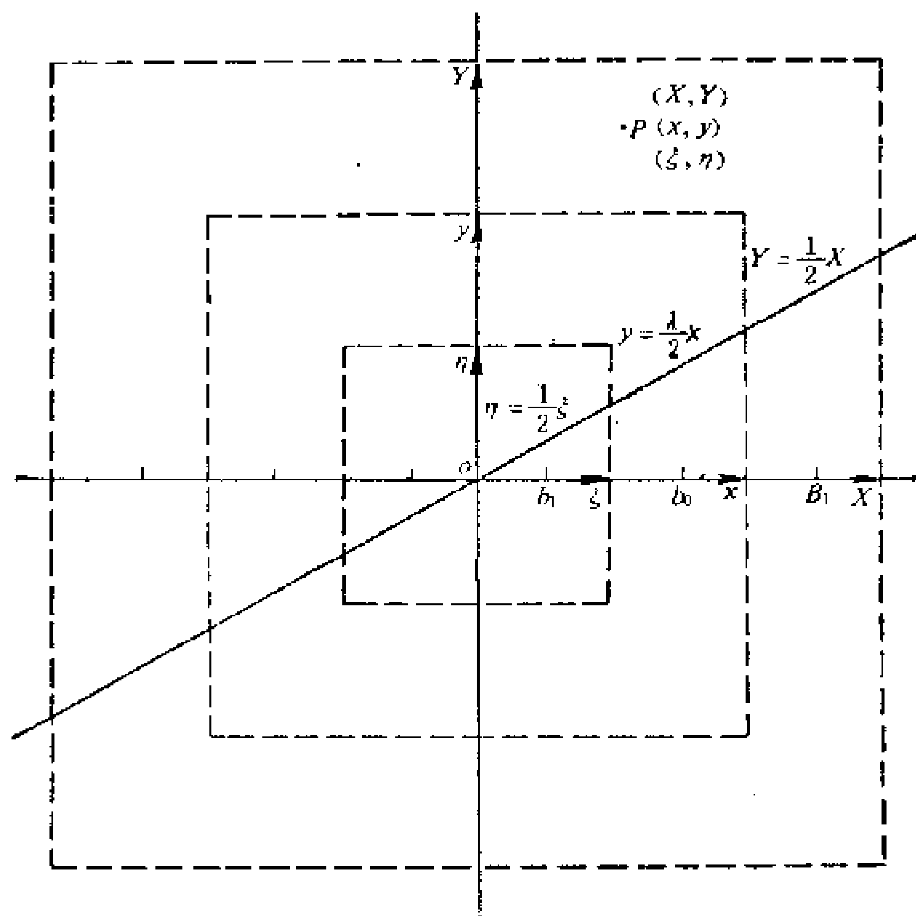
上节引进了分层坐标系，本节将在具有无限比值的三层坐标系中研究简单函数的图象。为此，在平面上引进分层坐标系

(31,1) $\{o\xi\eta, b_1\}$，$\{oxy, b_0\}$，$\{oXY, B_1\}$。

这三层坐标系表示在图(31,2)上。我们设它们的单位之间满足关系式

(31,3) ob_1/ob_0，ob_0/oB_1 是无限小。

我们首先计算一下三层坐标系之间的坐标变换公式。为



图（31,2）

此，我们在平面上取一点P，它在三层坐标系中的坐标分别为(ξ,η)，(x,y)和(X,Y)，那么成立以下公式

$$(31,4)\qquad \begin{cases} \xi ob_1 = xob_0 = XoB_1 \\ \eta ob_1 = yob_0 = YoB_1. \end{cases}$$

特别若

$$(31,5)\qquad \frac{ob_1}{ob_0} = \frac{ob_0}{oB_1} = b = \frac{1}{B},$$

那么b是无限小，B是无限大．那么从(31,4)推得

$$(31,6)\qquad \begin{cases} \xi = Bx = B^2X, \quad \eta = By = B^2Y, \\ x = b\xi = BX, \quad y = b\eta = BY, \\ X = bx = b^2\xi, \quad Y = by = b^2\eta. \end{cases}$$

以下我们研究简单函数的图象.

【例 1】 直线 我们研究$\{oxy,\ b_0\}$中的直线

(31,7) $$y=\frac{1}{2}x.$$

由(31,4)推得(31,7)在$\{o\xi\eta, b_1\}$的方程是

(31,8) $$\eta=\frac{1}{2}\xi$$

和在$\{oXY, B_1\}$的方程是

(31,9) $$Y=\frac{1}{2}X.$$

这条直线的图形绘在图(31,2)上.

【例 2】 抛物线.在$\{oxy, b_0\}$中的抛物线

(31,10) $$y=x^2,$$

它在$\{o\xi\eta, b_1\}$中的表示为

(31,11) $$\eta=\frac{ob_1}{ob_0}\xi^2.$$

由(31,3)推得

(31,12) $$\begin{cases}\text{若}\xi\text{是有限数，则}\eta\text{是无限小，}\\ \text{若}\eta\text{是有限数，则}\xi\text{是无限大.}\end{cases}$$

抛物线(31,10)在$\{oXY, B_1\}$中的表示为

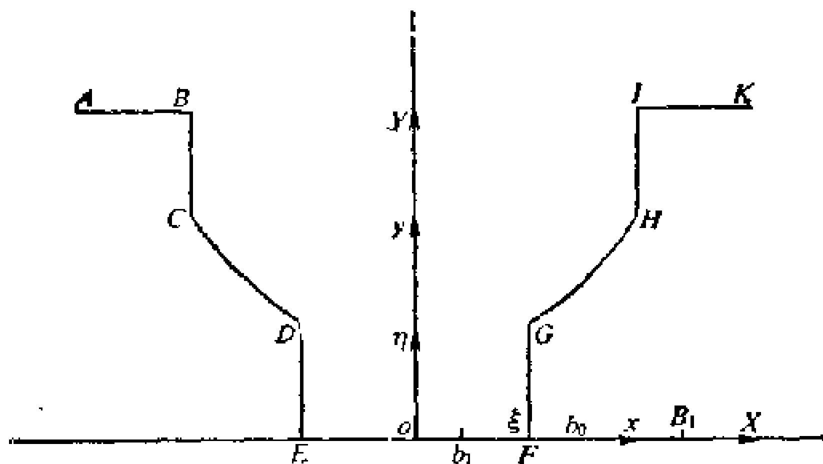
(31,13) $$Y=\frac{oB_1}{ob_0}X^2.$$

由(31,3)可推得以下结论

(31,14) $$\begin{cases}\text{若}X\text{是有限数和}X\text{不是无限小，则}Y\text{是无限大.}\\ \text{若}Y\text{是有限数，则}X\text{是无限小.}\end{cases}$$

这条抛物线的示意图见图(31,15).

这么简单的非线性函数，在不同层次的坐标系中，其图象大不相同.在$\{o\xi\eta, b_1\}$的任何有限部分，函数值表现为无限小;



图（31,15）

当ξ由有限达到无限大时，函数值有一个飞跃。在$\{oxy, b_0\}$中，当x为有限时，y也为有限，表现为一条平滑曲线，这就是我们早已熟悉了的抛物线图象。在$\{oXY, B_1\}$中，对X的任何非无限小的有限值，函数值为正无限大；而当X由无限小向有限值过渡时，函数值有一个飞跃。

图（31,15）是一种简化表示，它把星系gal(o, ob_1)的边界与原子atom(o, ob_0)的边界重合在E和F这两点上，又把星系gal(o, ob_0)的边界与原子atom(o, oB_1)的边界重合在BC和IH与ox轴的交点上。

【例 3】 正弦函数 在$\{oxy, b_0\}$中的函数

(31,16) $y = * \sin x$

经坐标变换（31,4），在$\{o\xi\eta, b_1\}$中表示为

(31,17) $$\eta = \frac{ob_0}{ob_1} * \sin\left(\frac{ob_1}{ob_0}\xi\right).$$

当ξ为有限时，由（29,4）可以看出

(31,18) $\eta = \xi + \alpha(\xi)$,

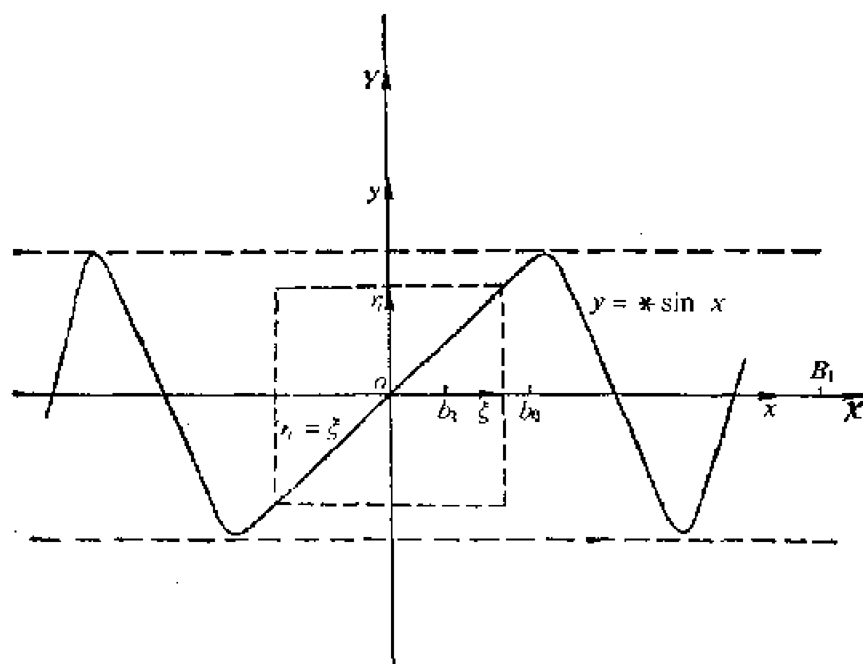
其中$\alpha(\xi)$满足

(31,19) 若ξ是有限数，则$\alpha(\xi)$是无限小。

在$\{oXY, B_1\}$中，这个函数表示为

$$(31,20)\qquad Y=\frac{ob_0}{oB_1}*\sin\left(\frac{oB_1}{ob_0}X\right).$$

所以对任何X，都成立Y是无限小。



图（31,21）

图（31,21）上表示的是正弦函数在三层坐标系中的图象。它在$\{o\xi\eta,b_1\}$中与$\eta=\xi$相差为无限小，在$\{oxy,b_0\}$中表现为常见的波形曲线，在$\{oXY,B_1\}$中表现为无限小量。

譬如，在某一秒钟里，在地球上的人们看来，地心几乎是直线运动；而在太阳系里，地心绕太阳作周期运动；在遥远的星系里看来，地心几乎是不动的了。

【例4】　对数函数　在$\{oxy,b_0\}$中研究对数函数

$$(31,22)\qquad y=*\ln(1+x).$$

经（31,4），在$\{o\xi\eta,b_1\}$中它的表示为

$$(31,23)\qquad \eta=\frac{ob_0}{ob_1}*\ln\left(1+\frac{ob_1}{ob_0}\xi\right),$$

并且成立以下公式

(31,24) $\eta=\xi+\alpha(\xi)$,

其中$\alpha(\xi)$满足

(31,25) 若ξ是有限数，则$\alpha(\xi)$是无限小.

在$\{oXY, B_1\}$中，(31,22)中的对数函数的表示为

(31,26) $$Y=\frac{ob_0}{oB_1}*\ln\left(1+\frac{oB_1}{ob_0}X\right),$$

并且成立以下性质

(31,27) $\begin{cases}\text{若}X\text{是有限数，则}Y\text{是无限小，}\\ \text{若}Y\text{是有限数，则}X\text{是正无限大.}\end{cases}$

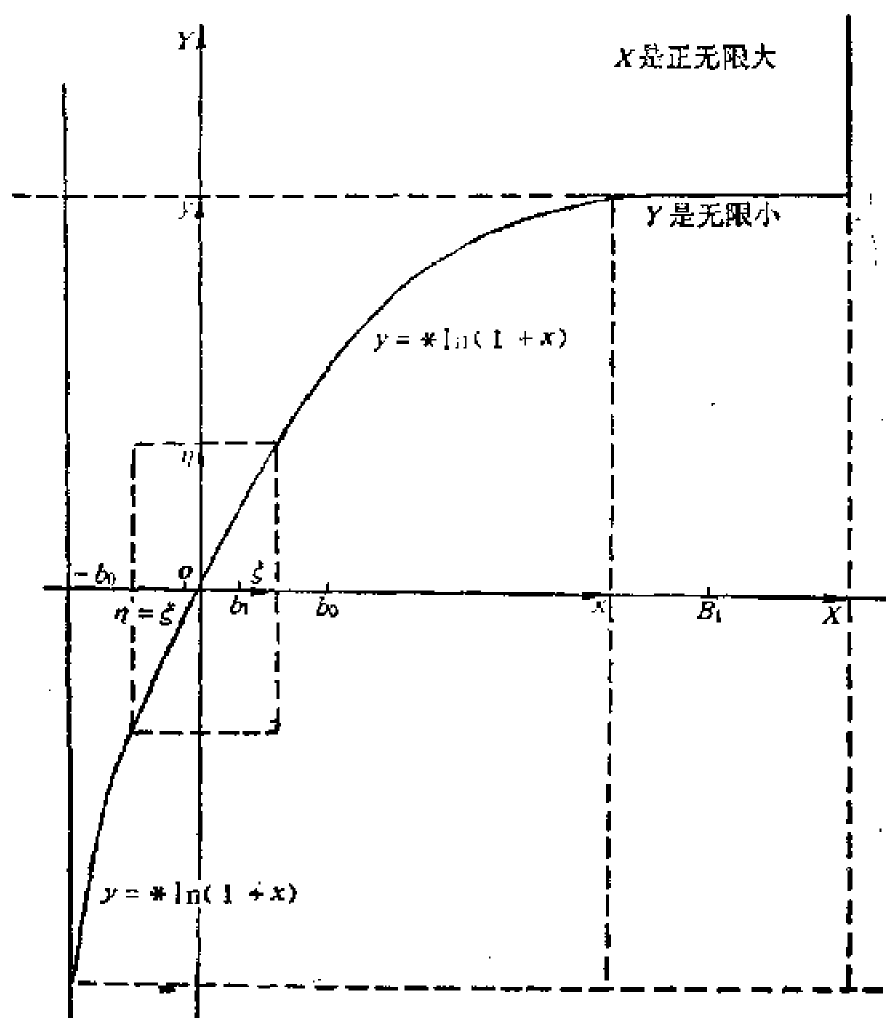


图 (31,28)

图(31,28)表示了这个函数的图象.在$\{o\xi\eta, b_1\}$中它与直线

$\eta=\xi$相差为无限小；在$\{oxy, b_0\}$中表现为常见的对数曲线；在$\{oXY, B_1\}$的有限部分上Y为无限小，当Y取有限值时，X已达正无限大。

§32 切线与割线

这一节讨论一下标准函数的导数的几何意义。在标准分析M中，若

(32,1) $a<b$, $f\in \mathrm{ft}([a,b],R)$且$f$在区间$[a,b]$可导。

由公设(5,2)，将上式转到$*M$得

(32,2) $*a<*b$, $*f\in *\mathrm{ft}([*a,*b],*R)$，且$*f$在区间$[*a,*b]$可导。

今取$\sigma\in *R$且$\sigma>0$，对函数$y=*f(x)$引进相似变换$x=\sigma\xi$和$y=\sigma\eta$得

$$(32,3)\quad \begin{cases} \eta=\varphi(\xi)=\dfrac{1}{\sigma}*f(\sigma\xi) \\ y=*f(x)=\sigma\varphi\left(\dfrac{x}{\sigma}\right). \end{cases}$$

若$x\in[*a,*b]$和$\xi\in\left[\dfrac{*a}{\sigma}, \dfrac{*b}{\sigma}\right]$则成立

(32,4) $*f^{*\prime}(x)=\varphi^{*\prime}(\xi)$.

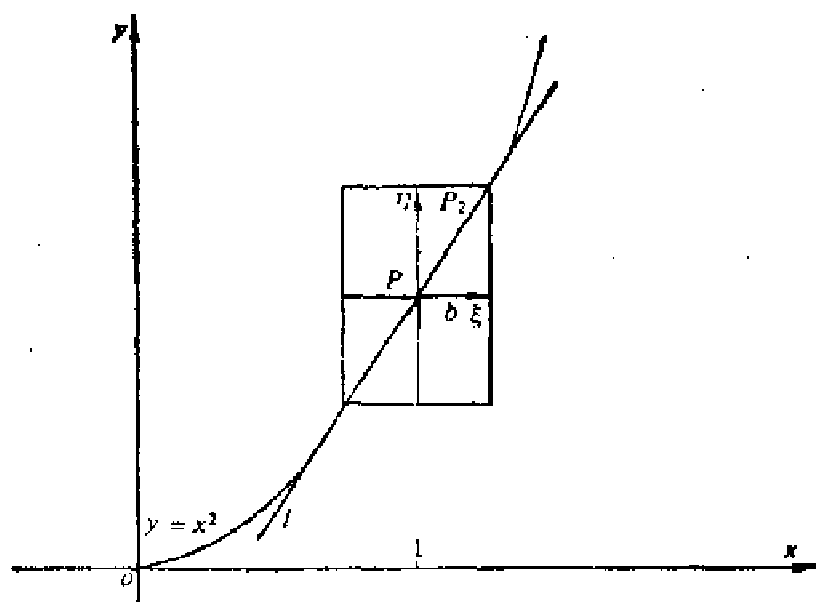
现在我们取$f(x)=x^2$，那么$f'(x)=2x$。由公设（5,2），将前面两式转到$*M$得$*f(x)=x^2$和$*f^{*\prime}(x)=2x$。现在请注意图(32,7)，在坐标系$\{oxy,1\}$中的点$P_1=(1,1)$，在点P_1成立$*f^{*\prime}(1)=2$。又函数$*f$在这点附近可以变形为

(32,5) $y=*f(x)=1+2(x-1)+(x-1)^2$.

函数$*f$过P_1点的切线方程为

(32,6) $y=1+2(x-1)$.

我们在P_1点附近引进小坐标系$\{P_1\xi\eta, b\}$，并且就以b表示



图（32,7）

P_1b的长度，又设b是无限小量．作相似变换：$y-1=b\eta$，$x-1=b\xi$．那么，在小坐标系$\{P_1\xi\eta,b\}$中函数＊f的表示为

(32,8) $\quad \eta=2\xi+b\xi^2$．

由于

(32,9) $\quad$ 当ξ是有限数，则$b\xi^2$是无限小，

所以在$\{P_1\xi\eta,b\}$的有限部分上，曲线和切线的差别为无限小，即可以把它们看成是重合的．这是流传了长时期的关于曲线的切线和曲线在无限小邻域中的关系，在M_2中可以得到形象的说明．

下面将进一步说明曲线的切线和割线之间的关系．为此，我们在$\{P_1\xi\eta,b\}$的有限部分上取一点$P_2=(1+\delta x,1+\delta y)$，并且$P_2$在曲线$y=x^2$上．我们记$\delta x=b\xi_0$．当然$\xi_0$是有限的，这时

(32,10) $\quad \delta y=(1+\delta x)^2-1$

$\qquad\qquad\qquad =2\delta x+(\delta x)^2$

(32,11) $$\frac{\delta y}{\delta x}=2+b\xi_0.$$

在$\{P_1\xi\eta,b\}$，设点P_2的坐标为(ξ_0,η_0)则

(32,12) $$\eta_0=2\xi_0+b\xi_0^2,$$

所以割线P_1P_2的方程式为

(32,13) $$\eta=(2+b\xi_0)\xi.$$

由于

(32,14) 当ξ是有限数时，$b\xi_0\xi$是无限小，

所以在$\{P_1\xi\eta,b\}$的有限部分上，切线l与割线P_1P_2的差别为无限小，读者可参考图（32,21）。

在$\{oxy,1\}$中，割线P_1P_2的方程式为

(32,15) $$\begin{aligned}y&=1+(2+b\xi_0)(x-1)\\&=1+2(x-1)+b\xi_0(x-1).\end{aligned}$$

由于

(32,16) 当x是有限数，则$b\xi_0(x-1)$是无限小，

所以在$\{oxy,1\}$的有限部分上，切线l与割线P_1P_2的差别是无限小.但在这里，切线l与曲线$y=x^2$已有明显差别了.因此，切线与无限小邻域中的割线的差别远远小于切线和曲线的差别.

现在取$B\in {}^*R$，$Bb=1$，并且在P_1点建立坐标系$\{P_1XY,B\}$，仍记P_1B之长为B，请参阅图（32,21）.作相似变换$x-1=BX$，$y-1=BY$，那么P_1P_2的方程为

(32,17) $$Y=(2+b\xi_0)X=2X+b\xi_0X.$$

由于

(32,18) 当X是有限数，则$b\xi_0X$是无限小，

所以在$\{oXY,B\}$的有限部分上切线l与割线P_1P_2的差别仍是无限小，然而这种无限小是相对于B而言的.

但是在（32,15）中取$x=1+B$，割线P_1P_2的纵坐标为

(32,19)　　$y_c = 1 + 2B + \xi_0$.

由 (32,6)知切线l的纵坐标为

(32,20)　　$y_l = 1 + 2B$.

于是$y_c - y_l = \xi_0$. 这就是说，在$\{oxy,1\}$中，当$x = 1 + B$是无限大时，才可能将切线l与割线P_1P_2明显地分开来。

最后请读者留览一下图(32,21)。

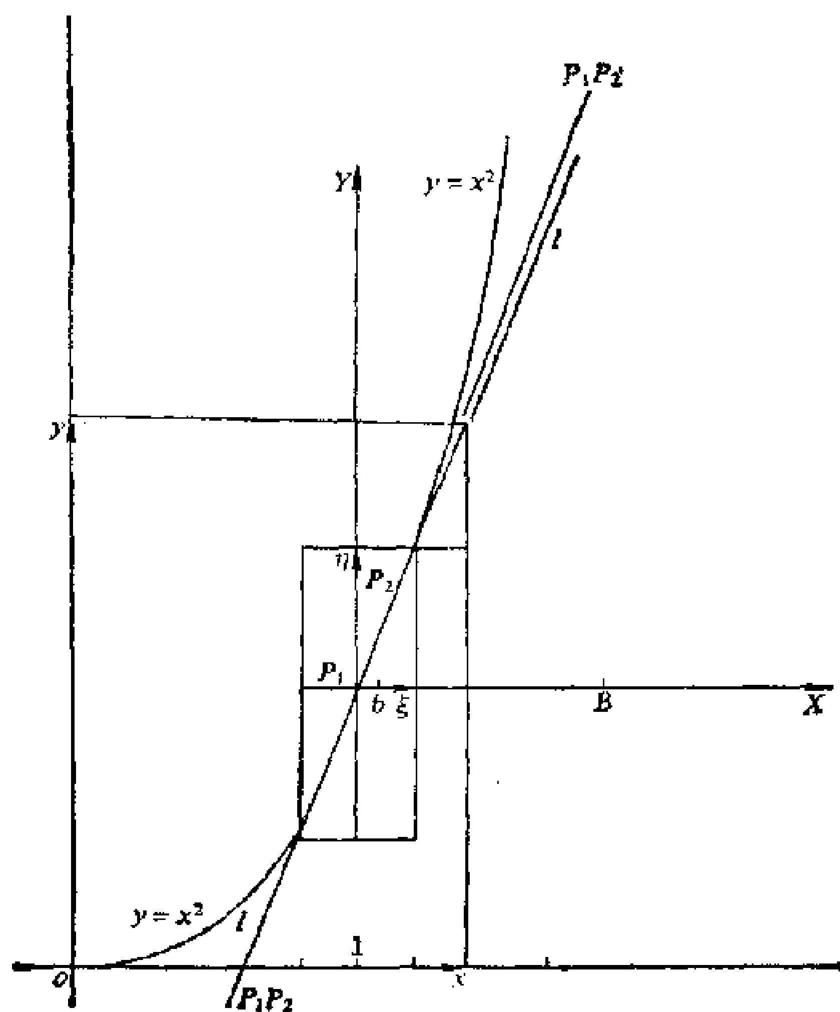


图 (32,21)

第六章　Dirac Delta函数理论

通过了前五章的准备，我们已经有了相当多的概念和术语以及初等函数，对于我们发展两相微积分学提供了初步的条件．所谓两相微积分学，就是M_2中既包含了$^*M$又包含了M的微积分学．

我们首先打算研究的，就是在M_2中进一步建立Dirac Delta函数的理论．

物理上一些抽象的点量，可以看成体积小和密度大的分布的极限．假设某物体的质量（或电荷）为1，分布在半径为a的小球内，则当$r \leqslant a$时，密度$\rho(r)$很大，而当$r > a$时，$\rho(r) = 0$．极限情况是，a趋于0，但这种极限情况，在Dirac之前被认为是毫无意义的．从Dirac在1926年引进Delta函数之后，才开始用连续分布的极限来描写点量．但在标准分析的范围内，这样的Delta函数是具有奇异性的．

按照物理学家的定义，Delta函数的含义如下：

$$(\mathrm{I}) \qquad \delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0, \end{cases}$$

并且具有积分性质

$$(\mathrm{II}) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1.$$

但这样的说法有明显的逻辑上的毛病．由于在标准分析中，∞不是一个确定的数，更精确地说，∞不是有序域R的一个成员，因为∞并不满足四则运算的规律．如果勉强把∞加到R中去，则所得到的集合已经不能构成一个有序域了．这样看来，

（Ⅰ）式没有明确的数学含义，而（Ⅱ）式则是对一个数字意义不明确的对象进行积分，就更令人费解了.这表明，在标准分析中，$\delta(x)$在$x=0$这点具有奇异性.

数学家们想了很多办法来克服这个困难.在伊凡宁柯[24]中介绍了一种建立在Stiltjes积分理论上的Delta函数的理论，在盖尔芳特[8]中则系统介绍了建立在Schwarz分布论的基础上的Delta函数的理论.但这些方法并没有搞清$\delta(x)$在$x=0$的局部结构，他们回避了$\delta(x)$在$x=0$的局部奇异性而去研究一些整体性质.他们的方法，在处理Delta函数的乘积和方幂等问题时困难重重.

在Lightstone[42]中用非标准分析的工具以点函数的形式表达了一部分Detla函数.这是一个进步.但在他们的意义下，Delta函数不能包括由de Broglie波规格化所得到的Delta函数，即物理学家称之为Fourier核的式子

$$(\text{Ⅲ})\qquad \frac{\sin Kx}{\pi x},$$

数学家则常称之为Dirichlet核.

王进儒[20]用无限小的观点讨论了Delta函数，特别是其中的评论是很有价值的.

石最坚与作者合作，在两相微积分[4]的概念基础上，共同研究了Delta函数，写出了论文[17].今在此文的基础上，作者又进一步系统地进行了研究.总的看法是，把Delta函数看作是$*M$中的某些特别函数，如$f(x)$，它对M中某些函数类Φ中的函数，如$g\in\Phi$，具有筛取性质，即成立

$$(\text{Ⅳ})\qquad \mathrm{st}\left(*\int f(x)g(x)dx\right)=g(o).$$

这里的积分的上、下限将在以后说明.

当然，在我们的理论中，Delta函数是$*M$中的函数，它在x

= 0 附近有着明显的表达式，因此不再具有奇异性．而且，Delta函数的乘积和方幂也就是 $*M$ 中函数的乘积和方幂，是自然地解决了的．在本章的最后，研究了由正交函数系所导出的Delta函数．这是另一类型的Delta函数．由于物理学家早已命名它们是Delta函数，（请参看伊凡宁柯[24]和Harris[38]），所以我们没有必要另取名字了．

§33 Dirac Delta函数的第一种定义

由于原来Delta函数只是一个泛函，所以在（Ⅳ）中积分上、下限不好确定，因为在 $*M$ 中这种上、下限有多种可能的取法，但比较自然地有两种取法，因此我们给出两种关于Delta函数的定义．

为了引进Delta函数的第一种定义，我们先在 $*M$ 引入以下定义

(33,1)　　如果 $s\in *ft(*R,*R)$，又对任何 $t_1<t_2$ 成立 $*$〔s 在区间 $[t_1,t_2]$ 黎曼可积〕，并且存在 $I_0\in *R$ 使得

$$*\lim_{\substack{t_1\to+*\infty\\ t_2\to-*\infty}} *\int_{t_1}^{t_2} s(x)dx=I_0,$$

那么称 $*$〔s 在 $*(-\infty,+\infty)$ 黎曼可积〕，并且记作

$$*\int_{-*\infty}^{+*\infty} s(x)dx=I_0.$$

现在在 M_2 引入关于Delta函数的第一种定义如下

(33,2)　　若 $q\in ft(R,R)$，$p\in *ft(*R,*R)$，和 $*$〔$p*q$ 在 $*(-\infty,+\infty)$ 黎曼可积〕，在这些条件下，我们称 p 是 q 在 $*(-\infty,+\infty)$ 的Delta函数，如果

$$\mathrm{st}\left(*\int_{-*\infty}^{+*\infty} p(x)*q(x)dx\right)=q(o).$$

最后这个等式就是通常所谓的筛取性质．注意，按我们的约定，

$*q$是M中的函数q通过 * ——映射在$*\Gamma$中所对应的那个函数.

为了以下的具体讨论，我们设b是无限小，$bB=1$.采用分层坐标系{$o\xi\eta,b$}，{$oxy,1$}和{oXY,B}.请读者回忆一下图(31,2)，就不难画出这个分层坐标系的图象了.

【例 1】 正态分布所对应的Delta函数. 在坐标系{$o\xi y$}中的概率积分

$$(33,3)\qquad y=\Phi(\xi)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}*\int_0^{\xi}*e^{-t^2}\,dt$$

是$*M$中的标准函数.注意到$\xi=Bx$，在坐标系{oxy}中上式变为

$$(33,4)\qquad y=\Phi(Bx)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}*\int_0^{Bx}*e^{-t^2}\,dt.$$

注意，在上式中把y看作x的函数，它仍然是$*M$中的函数，虽然B是正无限大.因为，对任意的$p\in *R$，令

$$(33,5)\qquad \Phi(px)=\Psi_p(x),$$

那么，Ψ_p是$*M$的函数，或者写成

$$(33,6)\qquad \Psi_p\in *\mathrm{ft}(*R,*R).$$

(33,5)与(33,6)之所以成立，因为在M可以作出类似的过程.

由于(33,6)对任意的$p\in *R$成立,特别对于p是正无限大仍然成立.进一步，当$p=B$时,它仍然成立，虽然B是正无限大.

这个问题很重要，我们按照逻辑公式(2,5)再作一次说明.在(2,5)中令X代表(33,6)中$p=B$的情况，即"$\Psi_B\in *\mathrm{ft}(*R,*R)$"，令$Y$代表"$B$是正无限大".那么由(2,5)，即

$$(33,7)\qquad X\to[Y\to X],$$

我们仍可得到X成立，即$\Psi_B\in *\mathrm{ft}(*R,*R)$,即$\Psi_B$是$*M$中的函数.虽然这时$Y$，即"$B$是正无限大"，是$M_2$中外的语句，它并不破坏$X$的成立，即$\Psi_B\in *\mathrm{ft}(*R,*R)$.

由于这一类问题很多，所以在这里特别作一个说明.因为

只有当Ψ_B是$*M$的函数，才可以使用$*M$中的微分和积分公式，等等.

由（33,4）不难看出

(33,8) $\Psi(Bx) = *\mathrm{sgn}(x) + \alpha_1(x)$，

其中sgn(x)是M中x的符号函数，而$*\mathrm{sgn}(x)$则表示通过$*$——映射后所对应的$*M$中x的符号函数.(33,8)右端的$\alpha_1(x)$满足

(33,9) 若x不是无限小，则$\alpha_1(x)$是无限小，

在$*M$中将y对x求导数得

(33.10) $$y^{*\prime}(x) = 2\delta_1(x) = \frac{2}{b\sqrt{\pi}} *e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^2}.$$

如果限制在M中用标准实数来表示$y=\Phi(Bx)$和$\delta_1(x)$，则当$x\in mon(o)$时，st$(\Phi(Bx))$和st$(\delta_1(x))$都不能表示为一个确定的标准值，因此函数具有奇异性，即超出了M的表达能力.而在$*M$中，这种奇异性被消除了.（33,4）中的$\Phi(Bx)$和

(33,11) $$\delta_1(x) = \frac{1}{b\sqrt{\pi}} *e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^2}$$

表示了这种函数的具体结构.如[17]所指出的，在无线电通讯中，就用到了形如（33,11）所表示的Delta函数.

关于$\delta_1(x)$的筛取性质，在M_2有以下定理

(33,12) 若$q\in ft(R,R)$，对任何标准实数$t_1<t_2$成立$q\in C([t_1;t_2])$，又存在标准实数$s_1>0$和$s_2>0$使得对任何$x\in R$成立

$$|q(x)|\leqslant s_1 e^{s_2x^2},$$

则$\delta_1(x)$是$q(x)$在$*(-\infty,+\infty)$的Delta函数.

证明.由于

$$(33,13)\qquad {}^*\int_{-*\infty}^{+*\infty}\delta_1(x){}^*q(x)dx$$

$$=\left\{{}^*\int_{-*\infty}^{-\sqrt{b}}+{}^*\int_{-\sqrt{b}}^{+\sqrt{b}}+{}^*\int_{+\sqrt{b}}^{+*\infty}\right\}\delta_1(x)$$

$${}^*q(x)dx.$$

现在先估计第一个积分.不难看出

$$(33,14)\qquad \left|{}^*\int_{-*\infty}^{-\sqrt{b}}\delta_1(x)q(x)dx\right|$$

$$=\left|\frac{1}{b\sqrt{\pi}}{}^*\int_{-*\infty}^{-\sqrt{b}}e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^2}q(x)dx\right|$$

$$\leqslant\frac{s_1}{b\sqrt{\pi}}{}^*\int_{-*\infty}^{-\sqrt{b}}e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^2+s_2x^2}dx$$

$$(\text{令}x=bt)$$

$$=\frac{s_1}{\sqrt{\pi}}{}^*\int_{-*\infty}^{-\frac{1}{\sqrt{b}}}e^{-(1-s_2b^2)t^2}dt$$

$$\leqslant\frac{s_1}{\sqrt{\pi}}{}^*\int_{-*\infty}^{-\frac{1}{\sqrt{b}}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\text{无限小}.$$

最后这一步是因为 $-\frac{1}{\sqrt{b}}$ 是负无限大.因此成立

$$(33,15)\qquad \mathrm{st}\left({}^*\int_{-*\infty}^{-\sqrt{b}}\delta_1(x){}^*q(x)dx\right)=0.$$

类似地，对 (33,13) 的第三项积分成立以下关系

$$(33,16)\qquad \mathrm{st}\left({}^*\int_{+\sqrt{b}}^{+*\infty}\delta_1(x){}^*q(x)dx\right)=0.$$

现在估计 (33,13) 右端第二项.利用${}^*M$中的积分第一中值定理 (23,2) 和连续函数的中值定理 (17,16)，我们有

$$(33,17)\qquad {}^*\int_{-\sqrt{b}}^{+\sqrt{b}}\delta_1(x){}^*q(x)dx$$

$$={}^*q(\xi_0)\,{}^*\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}}\delta_1(x)dx,$$

其中 $-\sqrt{b}\leqslant\xi_0\leqslant\sqrt{b}$. 由于$*q$是标准的连续函数，$\sqrt{b}$是无限小和注意到定理（6,33），我们有

(33,18) $$\mathrm{st}(q(\xi_0))=q(o).$$

又由于

(33,19) $$*\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}}\delta_1(x)dx$$
$$=\frac{1}{b\sqrt{\pi}}*\int_{-\sqrt{b}}^{+\sqrt{b}}e^{-(\frac{x}{b})^2}dx$$
（令$x=bt$、并注意到$bB=1$）
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}*\int_{-\sqrt{B}}^{\sqrt{B}}e^{-t^2}dt.$$

由于上式中$\sqrt{B}$是正无限大，注意到（16,36）和在M中已有的公式（参看雷日克[11]的163页）

(33,20) $$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=1,$$

所以成立

(33,21) $$\mathrm{st}(*\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}}\delta_1(x)dx)=1.$$

注意到（33,18）和（33,21），对（33,17）的两端取标准部分，得

(33,22) $$\mathrm{st}(*\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}}\delta_1(x)*q(x)dx)=q(o).$$

由(33,13),(33,15),(33,16)和(33,22)最后得到

(33,23) $$\mathrm{st}(*\int_{-*\infty}^{+*\infty}\delta_1(x)*q(x)dx)=q(o).$$

按定义（33,2），$\delta_1(x)$是$q(x)$在$*(-\infty,+\infty)$上的Delta函数，证完.

请注意，在定理（33,12)中限制了$q(x)$在无限远的性质，即假设了

(33,24) $|q(x)| \leqslant s_1 e^{s_2 x^2}$,

这是Delta 函数的第一种定义所引起的后果，在下节的第二种定义中可以取消这一类限制.

【例 2】 在坐标系 $\{o\xi y\}$ 中的标准函数

(33,25) $$y = F_2(\xi) = \frac{1}{{}^*e^{\xi} + 1}$$

变换到坐标系 $\{oxy\}$ 中得

(33,26) $$y = F_2\left(\frac{x}{b}\right) = \frac{1}{{}^*e^{\frac{x}{b}} + 1}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}{}^*\mathrm{sgn}(x) + \alpha_2(x),$$

其中$\alpha_2(x)$满足

(33,27) 若x不是无限小，则$\alpha_2(x)$是无限小.

在 (33,26) 中，将y对x取负导数得

(33,28) $$-y^{*\prime}(x) = \frac{\frac{1}{b}{}^*e^{\frac{x}{b}}}{({}^*e^{\frac{x}{b}} + 1)^2} = \delta_2(x).$$

如果限制在M中描述 $F_2\left(\frac{x}{b}\right)$和$\delta_2(x)$,则当$x \in \mathrm{mon}(o)$时，st $\left(F_2\left(\frac{x}{b}\right)\right)$和st$(\delta_2(x))$没有一个确定的标准值，因此函数具有奇异性.但在 ${}^*M$ 中 $F_2\left(\frac{x}{b}\right)$和 $\delta_2(x)$ 都是有明确表达式的点函数，没有任何奇性.从物理上讲，$F_2(x)$表示了费密(Fermi)分布，请参看[17].

关于$\delta_2(x)$的筛取性质，在M_2我们有以下定理

(33,29) 若$q \in \mathrm{ft}(R,R)$，对任何标准实数$t_1 < t_2$成立$q \in C([t_1,t_2])$，又存在标准实数 $s_1 > o$和$s_2 > o$ 使得对

任何 $x\in R$成立 $|q(x)|\leqslant s_1e^{s_2x^2}$，

则$\delta_2(x)$是$q(x)$在 $*(-\infty,+\infty)$ 上的Delta函数.

证明与定理(33,12)类似，从略.

【例 3】 在 $\{o\xi y\}$ 中研究函数

(33,30) $$y=F_3(\xi)=\frac{1}{2\pi}*\int_{-1}^{1}\frac{*\sin r\xi}{r}dr,$$

在上式中把$r=o$看作被积函数的可去奇点.$F_3(\xi)$ 显然是个标准函数.转到坐标系 $\{oxy\}$ 得

(33,31) $$y=F_3(Bx)=\frac{1}{2\pi}*\int_{-B}^{B}\frac{*\sin kx}{k}dk,$$

其中$k=Br$，不难看出成立以下等式

(33,32) $$y=F_3(Bx)=\frac{1}{2}*\mathrm{sgn}(x)+\alpha_3(x),$$

其中$\alpha_3(x)$满足

(33,33) 当x不是无限小，则$\alpha_3(x)$是无限小.

在 (33,33) 中将y对x求导数得

(33,34) $$y^{*\prime}(x)$$

$$=\Delta_1(x)=\frac{1}{2\pi}*\int_{-B}^{B}*\cos kx\,dk$$

$$=\frac{1}{2\pi}*\int_{-B}^{B}*e^{ikx}\,dk$$

$$=\frac{*\sin Bx}{\pi x}.$$

如果限制在M中表达$F_3(Bx)$和$\Delta_1(x)$，当 $x\in\mathrm{mon}(o)$ 时，st$(F_3(Bx))$没有一个确定的标准值.并且对任意的$r\in R$，当$x\in\mathrm{mon}(r)$，st$(\Delta_1(x))$都不能用一个标准值来表达.因此，$F_3(Bx)$在mon(o)表现奇异性，$\Delta_1(x)$对每个$r\in R$和$x\in\mathrm{mon}(r)$

都具有奇异性．但在$^*M$中，$F_3(Bx)$和$\varDelta_1(x)$都是非奇异的有确切表达的函数．

关于$\varDelta_1(x)$的筛取性质，我们有以下定理

(33,35)　若$q\in \mathrm{ft}(R,R)$，$|q|$在$(-\infty,+\infty)$黎曼可积，存在标准实数$t>0$使得q在$[-t,t]$有界变化，又q在原点o连续，则$\varDelta_1(x)$是$q(x)$在$^*(-\infty,+\infty)$的Delta函数．

证明．因为

(33,36)
$$
\begin{aligned}
&{}^*\int_{-*\infty}^{+*\infty}\varDelta_1(x)\,{}^*q(x)dx\\
&=\frac{1}{\pi}\,{}^*\int_{-*\infty}^{+*\infty}{}^*q(x)\frac{{}^*\sin Bx}{x}dx\\
&=\frac{1}{\pi}\left\{{}^*\int_{-*\infty}^{t}+{}^*\int_{-t}^{o}+{}^*\int_{o}^{t}\right.\\
&\quad\left.+{}^*\int_{t}^{+*\infty}\right\}{}^*q(x)\frac{{}^*\sin Bx}{x}dx\,.
\end{aligned}
$$

首先估计第一个积分．由于$q(x)$绝对可积，因此在M中成立(参看〔1〕三卷三分册，p.544)

(33,37)
$$\lim_{p\to+\infty}\int_{-\infty}^{-t}q(x)\frac{\sin px}{x}dx=0\,.$$

对(33,37)利用定理(15,36)得

(33,38)
$${}^*\int_{-*\infty}^{-t}{}^*q(x)\frac{{}^*\sin Bx}{x}dx\text{是无限小,}$$

即，

(33,39)
$$\mathrm{st}\left({}^*\int_{-*\infty}^{-t}{}^*q(x)\frac{{}^*\sin Bx}{x}dx\right)=0.$$

同理可得

(33,40)
$$\mathrm{st}\left({}^*\int_{t}^{+*\infty}{}^*q(x)\frac{{}^*\sin Bx}{x}dx\right)=0.$$

现在估计（33,36）中的第三个积分。请注意，在M中成立

(33,41) $$\lim_{p\to+\infty}\int_0^t \frac{\sin px}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

对(33,41)用定理(16,36)得

(33,42) $$\mathrm{st}\left(*\int_0^t \frac{*\sin Bx}{x}\,dx\right)=\frac{\pi}{2}.$$

因此，我们有

(33,43) $$\mathrm{st}\left(*\int_0^t *q(x)\frac{*\sin Bx}{x}\,dx\right)$$

$$=\mathrm{st}\left\{*q(0)*\int_0^t \frac{*\sin Bx}{x}\,dx\right.$$

$$\left.+*\int_0^t [*q(x)-*q(o)]\frac{*\sin Bx}{x}\,dx\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2}q(o)+\mathrm{st}\left\{\left[*\int_0^{\sqrt{b}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_{\sqrt{b}}^t\right][*q(x)-*q(0)]\frac{*\sin Bx}{x}\,dx\right\}.$$

利用积分第二中值公式(23,4)，上式等于

(33,44) $$=\frac{\pi}{2}q(0)$$

$$+\mathrm{st}\left\{[*q(\sqrt{b}_-)-*q(0)]*\int_{\eta_1}^{\sqrt{b}}\frac{*\sin Bx}{x}\right.$$

$$\left.dx\right\}+\mathrm{st}\left\{[*q(\sqrt{b}_+)-*q(o)]*\right.$$

$$\left.\int_{\sqrt{b}}^{\eta_2}\frac{*\sin Bx}{x}\,dx\right\}+\mathrm{st}\left\{[*q(t_-)-*q(o)]\right.$$

$$\left.*\int_{\eta_2}^t\frac{*\sin Bx}{x}\,dx\right\}.$$

上式上第二项和第三项为0，这是因为$q(x)$在$x=0$是连续的和$\sqrt{b}$是无限小，因而由定理(16,36)知$*q(\sqrt{b}_-)-*q(0)$

和 $*q(\sqrt{b}_+)$ $-*q$（0）都是无限小.上式中第四项也是0，

$$(33,45)\qquad *\int_{\eta_2}^{t}\frac{*\sin Bx}{x}dx$$

（令$Bx=\zeta$）

$$*\int_{B\eta_2}^{Bt}\frac{*\sin\zeta}{\zeta}d\zeta=\text{无限小},$$

上式中最后一步是因为$B\eta_2\geqslant B\sqrt{b}\geqslant\sqrt{B}$是无限大。因此，由（33,43)，(33,44）和(33,45)得

$$(33,46),\ \mathrm{st}\left(*\int_{o}^{t}*\ q(x)\ \frac{*\sin Bx}{x}dx\right)=\frac{\pi}{2}q(o)\ .$$

同理我们有

$$(33,47)\qquad \mathrm{st}\left(*\int_{-t}^{o}*q\ (x)\ \frac{*\sin Bx}{x}dx\ \right)=\frac{\pi}{2}q(o).$$

由（33,39），(33,40），(33,46），和（33,47）得

$$(33,48)\qquad \mathrm{st}\left(*\int_{-*\infty}^{+*\infty}\varDelta_1(x)*q\,(x)dx\right)=q(o)\ .$$

故$\varDelta_1(x)$是$q(x)$ 在$*(-\infty,+\infty)$上的Delta函数.定理(33,35)证完.

请注意，定理（33,12）与定理（33,35）加在函数q上的条件是不相同的，即q属于不同的函数类.主要的差别有两点：

1.在（33,12）中仅要求q是连续的，在（33,35）中除了要求q在$x=o$是连续的之外，还要求q在$x=o$局部有界变化；

2.在无限远外的性质不同，在(33,12）中只要求$|q|$以$s_1e^{s_2x^2}$为上界，但不要求$|q|$在（$-\infty,+\infty$）黎曼可积；在（33,15）中只要求$|q|$在（$-\infty,+\infty$）黎曼可积.

从物理意义上讲，$\varDelta_1(x)$ 表示de Broglie波规格化所产生的Delta函数，请参看〔17〕.

此外，$\delta_1(x)$和$\delta_2(x)$ 有着共同的特点，它们都是正值函

数，并且在M中看来，只当$x\in \text{mon}(o)$具有奇异性，当x不是无限小时成立

(33,49) $\text{st}(\delta_1(x))=0$和$\text{st}(\delta_2(x))=0$。

$\Delta_1(x)$则是另一类型的Delta函数，它的函数值是变号的。在M中看来，它的奇异性范围更为广大，对每个$r\in R$和$x\in \text{mon}(r)$，它都具有奇异性。$\Delta_1(x)$是非常有趣的函数，它有着无限大的圆频率B，这就是说，它的振动是非常迅速的。当自变量$x\in \text{mon}(o)$时，其振幅可以达到无限大。特别当$x=o$时，其振幅为无限大的数$\frac{B}{\pi}$，即振动是很强大的。当x是无限大时，$\Delta_1(x)$的振幅为无限小。但当x是有限数而不是无限小的，其振幅也是有限数且不是无限小。如果以n_0记$\frac{B}{\pi}$的整数部分，则$n_0\in {}^*N$且n_0为限大。又设

(33,50) $$x_0=\frac{2n_0\pi}{B}+\frac{\pi}{2B},$$

那么依次有不等式

$$\frac{B}{2\pi}\leqslant n_0\leqslant\frac{B}{\pi},$$

$$1\leqslant\frac{2n_0\pi}{B}\leqslant 2,$$

和

(33,51) $$1\leqslant x_0\leqslant 3.$$

这样，我们有

(33,52) $$\Delta_1(x_0)=\frac{1}{\pi}\frac{{}^*\sin\left(2n_0\pi+\frac{\pi}{2}\right)}{x_0}=\frac{1}{\pi x_0}.$$

由(33,5)和(33,52)得

(33,53) $$\frac{1}{3\pi}\leqslant\Delta_1(x_0)\leqslant\frac{1}{\pi}.$$

显然，$\Delta_1(x_0)$是有限数，但不是无限小.由de Broglie波规格化所得的Delta函数并不符合物理学家的传统表示（I）见本章开头的那些讨论.

【例 4】 在坐标系 $\{o\xi y\}$ 中研究函数

(33,54) $$y=F_4(\xi)=\frac{1}{\pi}*\text{arctg}\xi,$$

它是一个标准函数.在 $\{oxy\}$ 中它的表示为

(33,55) $$y=F_4(Bx)=\frac{1}{2}*\text{arctg}Bx.$$

上式是M中的函数.不难看出

(33,56) $$y=F_4(Bx)$$
$$=\frac{1}{2}*\text{sgn}(x)+\alpha_4(x),$$

其中$\alpha_4(x)$满足

(33,57) 若x不是无限小，则$\alpha_4(x)$是无限小.

这是因为，在M中当$x\neq o$时有极限

(33,58) $$\lim_{p\to+\infty}\frac{1}{\pi}\text{arctg }px=\frac{1}{2}\text{sgn}(x).$$

对（33,58)利用定理（16,36)就可得到（33,57)。

其实，(33,9)，(33,27）和（33,33)都可以用类似于（33,57）的证明方法去证明.

在（33,55）中将y对x求导数得

(33,59) $$y^{*\prime}(x)=\delta_3(x)=\frac{b}{\pi(x^2+b^2)}.$$

在M中看来，当$x\in\text{mon}(o)$时，$\delta_3(x)$具有奇性，但在$*M$中它不具奇性，是一个有明确表达式的函数.

对于$\delta_3(x)$的筛取性质，我们有以下定理

(33,60) 若$q\in\text{ft}(R,R)$，对任何$t_1<t_2$有$q\in C$（$[t_1,t_2]$），

又存在$m\in R$使得对任何x成立$|q(x)|\leqslant m$，则$\delta_3(x)$是$q(x)$在$^*(-\infty,+\infty)$的Delta函数.

$\delta_3(x)$是在研究电磁波散射时所出现的Delta函数，读者可参考〔17〕.

今证明定理（33,60）如下.由于

$$\int_{*-\infty}^{+\infty *}\delta_3(x) * q(x)dx \tag{33,61}$$

$$=\left\{ {}^*\int_{-*\infty}^{-\sqrt{b}} + {}^*\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} + {}^*\int_{\sqrt{b}}^{+*\infty} \right\}$$

$$\delta_3(x) * q(x)dx$$

$$= \text{I} + \text{II} + \text{III},$$

这里Ⅰ,Ⅱ和Ⅲ分别代表依次的三个积分.首先估计

$$|\text{I}|\leqslant m * \int_{-*\infty}^{-\sqrt{b}} \frac{b}{\pi(x^2+b^2)}dx \tag{33,62}$$

$$(\text{令}x=bt)$$

$$= m * \int_{-*\infty}^{-\sqrt{b}} \frac{dt}{\pi(1+t^2)}$$

$$= m[{}^*\text{arctg}(-\sqrt{B}) - {}^*\text{arctg}(-*\infty)].$$

注意到arctg$x$在无穷远的极限性质和定理（16,36）得

$$\text{st}(\text{I}) = 0. \tag{33,63}$$

类似地可得

$$\text{st}(\text{III}) = 0. \tag{33,64}$$

最后估计Ⅱ.计算如下：

$$\text{st}(\text{II}) = \text{st}\left({}^*\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} \delta_3(x) * q(x)dx \right). \tag{33,65}$$

对上式右端的积分采用$^*M$的积分第一中值公式（23,2）和连续函数的中值定理（17,16），我们有

$$\text{st}(\text{II}) = \text{st}\left\{ {}^*q(\xi_0) {}^*\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} \delta_3(x)dx \right\}, \tag{33,66}$$

其中$-\sqrt{b}\leqslant\xi_0\leqslant\sqrt{b}$.由于$q(x)$的连续性得

(33,67) $$\mathrm{st}(\mathrm{I})=q(o)\,\mathrm{st}\left(*\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}}\frac{b}{\pi(x^2+b^2)}dx\right)$$

$$=q(o)\,\mathrm{st}\left\{\frac{1}{\pi}\left[*\mathrm{arctg}\sqrt{B}\right.\right.$$

$$\left.\left.-*\mathrm{arctg}(-\sqrt{B})\right]\right\}$$

$$=q(o).$$

由 (33,63),(33,64)和(33,67)得

(33,68) $$\mathrm{st}\left(*\int_{-*\infty}^{+*\infty}\delta_3(x)*q(x)dx\right)=q(o).$$

故$\delta_3(x)$ 是$q(x)$ 在 $*(-\infty,+\infty)$的Delta函数.定理 (33,60) 证完.

【例 5】 如果在$*M$把$x=o$看作$\Delta_1(x)$ 的可去奇点, 我们计算一下$\Delta_1(\mathrm{o})$,不难看出

(33,69) $$\Delta_1(\mathrm{o})=\frac{B}{\pi}.$$

进一步研究$\Delta_1(x)$的平方，我们把它表示为

(33,70) $$\Delta_1^2(x)=\left(\frac{*\sin Bx}{\pi x}\right)^2=\Delta_1(o)\Delta_2(x),$$

其中

(33,71) $$\Delta_2(x)=\frac{*\sin^2 Bx}{\pi Bx^2}.$$

$\Delta_2(x)$为量子力学中计算跃迁几率所碰到的Delta函数， 请参看周世勋〔31〕。

关于$\Delta_2(x)$的筛取性质，我们有以下定理

(33,72) 若$q\in\mathrm{st}(R,R)$,对任何$t_1<t_2$成立$q\in C([t_1,t_2])$,又存在$m\in R$ 使得对任何x成立 $|q(x)|\leqslant m$, 则$\Delta_2(x)$是$q(x)$在$*(-\infty,+\infty)$的Delta函数.

此定理的证明与(33,60)的证明类似，从略。

§34 Dirac Delta 函数的第二种定义

在上节关于Delta 函数的第一种定义中，由于积分是在 * $(-\infty, +\infty)$ 上进行，所以必须对被筛函数q在无穷远的性质有所限制，因而导致某些条件的复杂化。因此，本节将研究Delta函数的另一种定义（即另一种筛取方式），它可以简化被筛取函数在无穷远的条件。

以下在M_2引进关于Delta函数的第二种定义

(34,1)　若B_1是正无限大，以Θ记区间$[-B_1, B_1]$；设$q\in$ ft(R,R)，$p\in *$ ft $(\Theta, *R)$；对任何标准$s_1<0$ $s_2>0$，设* $[p*q$在$[s_1, s_2]$黎曼可积$]$；在上述条件下，我们称p是q在$(-\infty, +\infty)$上的Delta函数，如果成立

$$\lim_{\substack{s_1\to-\infty \\ s_2\to+\infty}} \mathrm{st}\left(* \int_{s_1}^{s_2} p(x) * q(x)dx \right) = q(o).$$

下面将对上节讨论过的五个Delta函数的实例做进一步的分析。

1. 对 (33,11) 中的$\delta_1(x)$成立以下定理

(34,2)　若$q\in$ ft(R,R)，对任何标准实数$t_1<t_2$成立$q\in C([t_1,t_2])$，则$\delta_1(x)$是$q(x)$在$(-\infty, +\infty)$的Delta函数。

证明。对任何标准数$s_1<0$和$s_2>0$，由于

(34,3)
$$* \int_{s_1}^{s_2} \delta_1(x) * q(x)dx$$
$$= \left\{ * \int_{s_1}^{-\sqrt{b}} + * \int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} + * \int_{\sqrt{b}}^{s_2} \right\} \delta_1(x) * q(x)dx = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III},$$

这里Ⅰ，Ⅱ和Ⅲ分别代表依次的三个积分．首先估计第一个积分Ⅰ．由于当$|x|\geqslant\sqrt{b}$时，用定理（16,36）可得

$$\delta_1(x)=\frac{1}{b\sqrt{\pi}}e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^2}$$

是无限小，所以对任何$s_1<0$，在$[s_1, -\sqrt{b}]$上，$\delta_1(x)\cdot q(x)$是无限小，从而推得

(34,4) $$\text{Ⅰ}={}^*\int_{s_1}^{-\sqrt{b}}\delta_1(x)\cdot q(x)dx\text{是无限小．}$$

因而成立

(34,5) $$\text{st}(\text{Ⅰ})=0．$$

同理可得

(34,6) $$\text{st}(\text{Ⅲ})=0．$$

与（33,12）一样，我们有

(34,7) $$\text{st}(\text{Ⅱ})=q(0)．$$

这样，由（34,3），（34,5），（34,6）和（34,7）得

(34,8) $$\text{st}\left({}^*\int_{s_1}^{s_2}\delta_1(x)\cdot q(x)dx\right)=q(o)．$$

定理（34,2）证完．

2．将定理（34,2）中的$\delta_1(x)$换为（33,28）的$\delta_2(x)$，所得定理仍然成立．

3．对（33,34）中的$\varDelta_1(x)$成立以下定理：

(34,9) 若$q\in\text{st}(R,R)$；对任何标准实数$s_1<0$和$s_2>0$，$|q|$在$[s_1,s_2]$黎曼可积；$q(x)$在$x=0$连续；又存在标准实数$t>0$使得$q(x)$在$[-t,t]$有界变化，则$\varDelta_1(x)$是$q(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的Delta函数．

证明．因为

(34,10) $${}^*\int_{s_1}^{s_2} \varDelta_1(x)\ {}^*\ q(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\Big\{ {}^*\int_{s_1}^{-\iota} + {}^*\int_{-\iota}^{o} + {}^*\int_{o}^{\iota} + {}^*\int_{\iota}^{s_2} \Big\} {}^*q(x)\ \frac{{}^*\sin Bx}{x}dx$$

$$= \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV},$$

这里Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ和Ⅳ分别代表依次的四个积分。

首先估计第一项。由于$q(x)$的绝对可积性，因此在M中成立（读者可参考〔1〕的三卷三分册）

(34,11) $$\lim_{p\to+\infty}\int_{s_1}^{-\iota} q(x)\ \frac{\sin px}{x}dx = 0.$$

对(34,11)采用定理(16,36)得

(34,12) $${}^*\int_{s_1}^{-\iota} {}^*\ q(x)\ \frac{{}^*\sin Bx}{x}dx\text{是无限小。}$$

因此，我们有

(34,13) $\mathrm{st}(\mathrm{I}) = 0.$

类似成立

(34,14) $\mathrm{st}(\mathrm{IV}) = 0.$

对于Ⅲ和Ⅱ的估计与(33,47)和(33,46)相同。由此，(34,10)，(34,13)和(33,14)得

(34,15) $${}^*\int_{s_1}^{s_2} \varDelta_1(x)\ {}^*\ q(x)\,dx = q(o).$$

定理(34,9)证完。

4．将定理(34,2)中的$\delta_1(x)$换成(33,59)中的$\delta_3(x)$，所得定理仍然成立。

5．将定理(34,2)中的$\delta_1(x)$换成(33,71)中的$\varDelta_2(x)$，所得定理仍然成立。

按照Delta函数的第二种定义，对于$\delta_1(x)$，$\delta_2(x)$，$\delta_3(x)$，$\varDelta_1(x)$和$\varDelta_2(x)$而言，加在被筛取函数$q(x)$上的条件多少可以简化一点。

进一步，我们在M_2还可以引入以下两个定义.第一个是

(34,16)　　若$\mathscr{A}\subset ft(R,R)$，$p\in ft(*R,*R)$，

对每个$q\subset\mathscr{A}$成立$*$〔$p*q$在$*(-\infty,+\infty)$黎曼可积〕，在这些条件下，我们称p是函数类$\mathscr{A}$在$*(-\infty,+\infty)$的Delta函数，如果对每个$q\in\mathscr{A}$成立

$$\mathrm{st}\left(*\int_{-*\infty}^{+*\infty}p(x)*q(x)dx\right)=q(o).$$

第二个定义是

(34,17)　　若B_1是正无限大，以Θ记区间$[-B_1,B_1]$；设$\mathscr{B}\subset \mathrm{ft}(R,R)$，$p\in *\mathrm{ft}(\Theta,*R)$；对任何标准数$s_1<0$和$s_2>0$和$q\in\mathscr{B}$设$*$〔$p*q$在$[s_1,s_2]$黎曼可积〕，在上述条件下，我们称$p$是函数类$\mathscr{B}$在$(-\infty,+\infty)$的Delta函数，如果对每个$q\in\mathscr{B}$成立

$$\lim_{\substack{s_1\to+\infty\\ s_2\to+\infty}}\mathrm{st}\left(*\int_{s_1}^{s_2}p(x)*q(x)dx=q(o)\right)$$

请注意，在定理(33,12)，(33,29)，(33,35)，(33,60)，(33,72)，(34,2)和(34,9)中，加在$q(x)$上的条件不尽相同．也就是说，q分属于不同的函数类.我们想选取一个函数类，它成为以上诸定理中的每个函数类的子类.这件事是容易办到的．特别，我们可以选取一个很强的函数类$C_0^\infty(R)$，它的定义如下：$C_0^\infty(R)$是$\mathrm{ft}(R,R)$的子集，它的元素是具有无穷次连续导数的函数，并且每个函数都具有自己的紧致支撑，即每个函数在R的某个有界闭集之外为0．

这样，我们不难看出，上述的$\delta_1(x)$，$\delta_2(x)$，$\delta_3(x)$，$\Delta_1(x)$和$\Delta_2(x)$既是函数类$C_0^\infty(R)$在$*(-\infty,+\infty)$上的Delta函数，又是$C_0^\infty(R)$在$(-\infty,+\infty)$上的Delta函数．

因此，对于很多具体的目的而言，我们只要取$\mathscr{A}$或$\mathscr{B}$是$C_0^\infty(R)$就够了.就现有情况而言，$C_0^\infty(R)$上的Delta函数占有

重要地位，它足够地表达了Delta函数的共性.

但我们也要注意到另一方面，如果只用$C_0^\infty(R)$的函数作为检验函数（即被筛取函数），那么就无法分辨具体的Delta函数，如$\Delta_1(x)$和$\delta_1(x)$的差别，也无法研究每个Delta函数的特点.作者的看法是，应当注意到Delta函数的特性和共性两方面，并注意到它们在物理中的应用，才能使理论更加丰富多采.

§35 Delta函数乘积的例题

Delta函数的乘积是数学家和物理学家所关心的一个重大问题.由于我们的Delta函数是$*M$的一部分函数，所以乘积问题自然地在$*M$得到解决.为了使人们感到具体，今举几个例题如下.

【例1】 我们把(33,11)中的$\delta_1(x)$写成

$$(35,1)\qquad \delta_1(x,b)=\frac{1}{b\sqrt{\pi}}*e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^2}.$$

那么不难看出

$$(35,2)\qquad \delta_1(o,b)=\frac{1}{b\sqrt{\pi}},$$

和

$$(35,3)\qquad \delta_1^2(x,b)=\frac{1}{b\cdot\pi}*e^{-2\left(\frac{x}{b}\right)^2}$$

$$=\frac{\delta_1(o,b)}{\sqrt{\pi}}\delta_1(x,b_1),$$

其中$b_1=b/\sqrt{2}$.

取一个标准函数

$$(35,4)\qquad f_1(x)=A+Ex+x^2g_1(x),$$

其中常数$A,E\in R$，$g_1\in C(R)$，而且存在m使得$|g_1(x)|\leqslant m$.

现在研究积分

$$(35,5)\qquad \int_{*-\infty}^{+*\infty} \delta_1^2(x,b) * f_1(x)dx$$

$$= \frac{1}{\pi b^2} * \int_{*-\infty}^{+*\infty} * f_1(x) * e^{-2\left(\frac{x}{b}\right)^2} dx$$

(令$x = b\xi$)

$$= \frac{1}{\pi} * \int_{*-\infty}^{+*\infty} \left[\frac{A}{b} + E\xi + b\xi^2 g_1(b\xi)\right] * e^{-2\xi^2} d\xi$$

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III},$$

这里Ⅰ，Ⅱ和Ⅲ分别代表依次的三项积分.现在计算积分Ⅰ，

$$(35,6)\qquad I = \frac{1}{\pi} * \int_{-*\infty}^{+*\infty} \frac{A}{b} * e^{-2\xi^2} d\xi \quad \left(\xi = \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{A}{b\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-*\infty}^{+*\infty} * e^{-t^2} dt$$

$$= \frac{A}{b\sqrt{2\pi}} = \frac{A}{\sqrt{2}} \delta_1(o,b).$$

接着计算Ⅱ.由于ξ是奇函数，不难看出

$$(35,7)\qquad \mathrm{II} = \frac{1}{\pi} * \int_{-*\infty}^{+*\infty} E\xi \cdot e^{-2\xi^2} d\xi = 0.$$

最后计算Ⅲ.不难看出

$$(35,8)\qquad |\mathrm{III}| \leqslant \frac{mb}{\pi} \int_{-*\infty}^{+*\infty} \xi^2 * e^{-2\xi^2} d\xi = \text{无限小}.$$

因此，我们有

$$(35,9)\qquad * \int_{-*\infty}^{+*\infty} \delta_1^2(x,b) * f_1(x)dx$$

$$= \frac{A}{b\sqrt{2\pi}} + \text{无限小} = \frac{f_1(0)}{\sqrt{2}} \delta(o,b) + \text{无限小}.$$

现在我们研究另一标准函数

$$(35,10)\qquad f_2(x) = A + E|x| + x^2 g_1(x),$$

其中A，E和$g_1(x)$与(35,4)中的一样.我们计算下面积分

(35,11) $\quad * \int_{-*\infty}^{+*\infty} \delta_1^2(x,b) * f_2(x)dx$

$$= \frac{1}{\pi b^2} * \int_{-*\infty}^{+*\infty} * f_2(x) * e^{-2\left(\frac{x}{b}\right)^2} dx$$

$(x = b\xi)$

$$= \frac{1}{\pi} * \int_{-*\infty}^{+*\infty} \left[\frac{A}{b} + E|\xi| + b\xi^2 * g_1(b\xi)\right]$$

$$* e^{-2\xi^2} d\xi = \mathrm{I} + \tilde{\mathrm{I}} + \mathrm{III},$$

这里Ⅰ，$\tilde{\mathrm{I}}$和Ⅲ分别代表依次的三三项积分. 由于Ⅰ和Ⅲ已分别由(35,6)和(35,8)算出，现在只算$\tilde{\mathrm{I}}$. 不难看出

(35,12) $\quad \tilde{\mathrm{I}} = \frac{1}{\pi} \int_{-*\infty}^{+*\infty} E|\xi| e^{-2\xi^2} d\xi$

$$= \frac{2E}{\pi} * \int_0^{+*\infty} \xi e^{-2\xi^2} d\xi = \frac{E}{2\pi}.$$

因此，我们有

(35,13) $\quad * \int_{-*\infty}^{+*\infty} \delta_1^2(x,b) * f_2(x)dx$

$$= \frac{f_1(o)}{\sqrt{2}} \delta_1(o,b) + \frac{E}{2\pi} + \text{无限小}.$$

特别当$A = 1$，$E = 0$和$g_1(x) = 0$，我们有

(35,14) $\quad * \int_{-*\infty}^{+*\infty} \delta_1^2(x,b)dx = \frac{\delta_1(o,b)}{\sqrt{2}}.$

2. 为了和$\delta_1^2(x,b)$进行对比，我们在下文中引入另一个Delta函数. 在坐标系$\{o\xi\eta, b\}$中的标准函数

(35,15) $\quad \eta = \sqrt{\xi^2 + 1}$

变换到$\{oxy, 1\}$中 ($x = b\xi$, $y = b\eta$)，得到

(35,16) $\quad y = \sqrt{x^2 + b^2} = |x| + \beta(x)$,

这里

(35,17) $\beta(x) = \dfrac{b}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{b}\right)^2}+\sqrt{\left(\dfrac{x}{b}\right)^2}}=$ 无限小。

在(35,15)中将η对ξ求导数得

(35,18) $\eta'(\xi) = \dfrac{\xi}{\sqrt{\xi^2+1}}$.

在(35,16)中将y对x求导数得

(35,19) $$y^{*\prime}(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}} = {}^*\mathrm{sgn}(x)+\alpha(x),$$

这里$^*\mathrm{sgn}(x)$为x的符号函数，而$\alpha(x)$满足以下性质：

(35,20) 当x不是无限小，则$\alpha(x)$是无限小.

现在研究二阶导数.对(35,18)再求一次导数得

(35,21) $\eta''(\xi) = \dfrac{1}{(\xi^2+1)^{3/2}}$.

对(35,19)再求一次导数得

(35,22) $y^{*\prime\prime}(x) = \dfrac{b^2}{(x^2+b^2)^{3/2}}$,

并且成立以下性质

(35,23) 当x不是无限小，则$y^{*\prime\prime}(x)$是无限小.

请注意以下积分

(35,24) $$\begin{aligned} &{}^*\int_{-^*\infty}^{+^*\infty} y^{*\prime\prime}(x)dx \\ &= {}^*\int_{-^*\infty}^{+^*\infty} \frac{b^2}{(x^2+b^2)^{3/2}}dx \\ &= {}^*\int_{-^*\infty}^{+^*\infty} \frac{d\xi}{(\xi^2+1)^{3/2}} = 2. \end{aligned}$$

现在令

(35,25) $\delta_4(x) = \dfrac{b^2}{2(x^2+b^2)^{3/2}}$.

容易验证：$\delta_4(x)$是函数类$C_0^\infty(R)$在$*(-\infty,+\infty)$和$(-\infty,+\infty)$的Delta函数。若将定理(33,60)中的$\delta_3(x)$换成$\delta_4(x)$，所得命题仍然正确。若将定理(34,2)中的$\delta_1(x)$换成$\delta_4(x)$，所得命题亦真。

现在研究$\delta_1^2(x)$对标准函数的筛取性质。首先计算积分

(35,26)
$$
\begin{aligned}
&*\int_{-*\infty}^{+*\infty} \delta_1^2(x) * f_1(x)\,dx \\
&= *\int_{-*\infty}^{+*\infty} * f_1(x) \frac{b^4}{4(x^2+b^2)^3}\,dx \\
&(\text{令}\ x = b\xi) \\
&= *\int_{-*\infty}^{+*\infty} \left[\frac{A}{b} + E\xi + b\xi^2 * g_1(b\xi)\right] \frac{d\xi}{4(1+\xi^2)^3} \\
&= \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III},
\end{aligned}
$$

这里Ⅰ，Ⅱ和Ⅲ分别代表依次的三项积分。在计算之先，我们先指出以下积分公式

(35,27)
$$
\int \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^3} = \frac{\xi}{2}\left\{\frac{1}{2(1+\xi^2)^2} + \frac{3}{4(1+\xi^2)}\right\} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg}\xi + \text{Const.},
$$

这里“Const”代表某个常数。于是不难算出

(35,28)
$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} &= *\int_{-*\infty}^{+*\infty} \frac{A}{4b(1+\xi^2)^3}\,d\xi \\
&= \frac{A}{4b}\left[\frac{3}{8} * \operatorname{arctg}\xi\right]_{-*\infty}^{+*\infty} \\
&= \frac{3\pi A}{32b} = \frac{3\pi}{16} f_1(0)\delta_4(0).
\end{aligned}
$$

由于奇函数的性质，我们有

(35,29)
$$
\mathrm{II} = *\int_{-*\infty}^{+*\infty} \frac{E\xi}{4(1+\xi^2)^3}\,d\xi = 0.
$$

最后，我们不难得到估计

$$(35,30)\qquad |\mathrm{III}| \leqslant {}^*\int_{-{}^*\infty}^{+{}^*\infty} \frac{b\xi^2 |{}^*g_1(b\xi)|}{4(1+\xi^2)^3} d\xi$$

$$\leqslant \frac{mb}{4} {}^*\int_{-{}^*\infty}^{+{}^*\infty} \frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^3} d\xi$$

$$= \text{无限小}.$$

所以最后得到

$$(35,31)\qquad {}^*\int_{-{}^*\infty}^{+{}^*\infty} \delta_4^2(x\ {}^*f_1(x)\,dx = \frac{3\pi A}{32b} + \text{无限小}$$

$$= \frac{3\pi}{16} f_1(0)\delta_4(0) + \text{无限小}.$$

进一步，我们计算以下积分

$$(35,32)\qquad {}^*\int_{-{}^*\infty}^{+{}^*\infty} \delta_4^2(x)\ {}^*f_2(x)dx$$

$$= {}^*\int_{-{}^*\infty}^{+{}^*\infty} \left(\frac{A}{b} + E|\xi| + b\xi^2\ {}^*g_1(b\xi)\right)\frac{d\xi}{4(1+\xi^2)^3}$$

$$= \mathrm{I} + \tilde{\mathrm{I}} + \mathrm{III},$$

这里 I，$\tilde{\mathrm{I}}$ 和 III 分别代表依次的三项积分. I 的计算见 (35,28)，III 的估值见(35,30). 以下只计算 $\tilde{\mathrm{I}}$.

$$(35,33)\qquad \tilde{\mathrm{I}} = {}^*\int_{-{}^*\infty}^{+{}^*\infty} \frac{E|\xi|}{4(1+\xi^2)^3} d\xi$$

$$= \frac{E}{2} {}^*\int_0^{+{}^*\infty} \frac{\xi}{(1+\xi^2)^3} d\xi$$

$$= -\frac{E}{8}\left\{\frac{1}{(1+\xi^2)^2}\right\}_0^{+{}^*\infty} = \frac{E}{8}.$$

这样，我们有

$$(35,34)\qquad {}^*\int_{-{}^*\infty}^{+{}^*\infty} \delta_4^2(x)\ {}^*f_2(x)dx$$

$$= \frac{3\pi}{16} f_1(o)\delta_4(o) + \frac{E}{8} + \text{无限小}.$$

特别，当$A=1$，$E=0$和$g_1(x)=0$，我们有

$$(35,35)\qquad {}^*\int_{-*\infty}^{+*\infty}\delta_4^2(x)dx=\frac{3\pi}{16}\delta_4(o).$$

由以上计算我们可以得到以下一些看法.

1.如果以$\delta(x)$表示某个Delta函数，则$\delta^2(x)$在$^*M$的积分，即

$$(35,36)\qquad {}^*\int_{-*\infty}^{+*\infty}\delta^2(x)dx$$

与$\delta(o)$之间并没有什么固定的比例关系.在(35,14)中，比例系数为$1/\sqrt{2}$.在(35,35)中，比例系数为$3\pi/16$.而对$\Delta_1(x)$，参看(33,70)可得

$$(35,37)\qquad {}^*\int_{-*\infty}^{+*\infty}\Delta_1^2(x)dx=\Delta_1(o),$$

即比例系数为1.但是,如果对任何$\delta(x)$,都认为象(35,37)那样比例系数为1，这是很不恰当的.

这也是说，对任意的Delta函数$\delta(x)$而言，$\delta^2(x)/\delta(o)$并不恰好就是一个Delta函数.

2.如果在(35,4)中令$A=o$，则$\delta_1^2(x,b)$在(35,9)中对标准函数$f_1(x)$筛取的标准值为0，在(35,13)中对$f_2(x)$筛取的标准值为$\frac{E}{2\pi}$.$\delta_4^2(x)$在(35,31)中对$f_1(x)$筛取的标准值为0，在(35,34)中对$f_2(x)$筛取的标准值为$\frac{E}{8}$.在这里也看不出任何固定的比例关系.这样看来，对一般的Delta函数$\delta(x)$，它的平方，即$\delta^2(x)$对标准函数的筛取能力并不是固定的.

最后，我们指出另外一件有趣的事实，(35,15)中所表示的是$\{o\xi\eta,b\}$坐标系中上半平面上的等轴双曲线.但换到$\{oxy,1\}$坐标系中则近似地成了$y=|x|$，即一条折线.

§36 Delta函数与黎曼反常积分

我们在§33中引入Delta函数$\delta_1(x)$时，用到了以下的黎曼反常积分

(36，1) $$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = 1 .$$

由此得到启发。我们可以去随便地查阅一本积分表，譬如说，雷日克的〔11〕，我们可以发现很多这种公式。今摘录几个如下

(36，2) $$\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}dx = 1 ,$$

(36，3) $$\frac{1}{\sqrt{\pi}\, e^{q^2/4p}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px^2 \pm qx}dx = 1 ,$$

(36，4) $$\frac{1}{\Gamma(q)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^x}e^{qx}dx = 1 .$$

我们完全可以从（36，2），（36，3）和（36，4）出发构造出另外一些Delta函数。

为了把这种构造过程一般化，在标准分析M中我们设

(36，5) $f\in \mathfrak{F}(R,R)$，$f\in C(R)$，$f(t)\geqslant 0$且$f(t)$在$(-\infty, +\infty)$黎曼可积并使得
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1 .$$

与（33，3）类似，我们在$\{o\xi y\}$中研究标准函数

(36，6) $$y = F(\xi) = {}^*\!\int_{-{}^*\infty}^{\xi} {}^*f(t)dt .$$

换到坐标系$\{oxy\}$中，即令$\xi = Bx$，则成立

(36，7) $$y = F(Bx) = {}^*\!\int_{-{}^*\infty}^{Bx} {}^*f(t)dt ,$$

它仍是$^*M$中的函数，在（36，7）中将y对x求一次导数得

(36, 8)　　$y^{*\prime}(x)=Bf(Bx)$.

那么，$Bf(Bx)$是一个Delta函数，关于它的筛取性质，我们有以下定理

(36, 9)　　若$q\in \mathrm{ft}(R, R)$，对任何标准数$t_1<t_2$有$q\in C([t_1,t_2])$，又存在$m\in R$使得对任何x成立$|q(x)|\leqslant m$，又$f(t)$满足(36, 5)的条件，则$Bf(Bx)$是$q(x)$在$*(-\infty, +\infty)$的Delta函数.

证明：令$\delta(x)=Bf(Bx)$，则

(36,10)
$$*\int_{-*\infty}^{+*\infty}\delta(x)*q(x)\,dx$$
$$=\left\{*\int_{-*\infty}^{-\sqrt{b}}+*\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}}+*\int_{\sqrt{b}}^{+*\infty}\right\}\delta(x)*q(x)\,dx$$
$$=\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III},$$

这里Ⅰ，Ⅱ和Ⅲ分别代表依次的三个积分.首先估计Ⅰ.注意到$bB=1$和B是无限大，我们有

(36,11)
$$|\mathrm{I}|\leqslant m*\int_{-*\infty}^{-\sqrt{b}}Bf(Bx)\,dx\,(Bx=\xi)$$
$$=m*\int_{-*\infty}^{-\sqrt{B}}*f(\xi)\,d\xi=\text{无限小}.$$

最后这一步是因为$\sqrt{B}$是无限大，$f(t)$在$(-\infty, +\infty)$黎曼可积以及定理(16, 36)而得到.同样可以得到

(36,12)　　$\mathrm{III}=$无限小.

最后计算Ⅱ，

(36,13)
$$\mathrm{II}=*\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}}Bf(Bx)*q(x)\,dx$$
$$=*q(x_0)*\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}}Bf(Bx)\,dx.$$

上式中$-\sqrt{b}\leqslant x_0\leqslant\sqrt{b}$，这是积分第一中值公式(23, 2)

和连续函数的中值定理（17，16）得到.进一步，由于$q(x)$的连续性和定理（16，33）得到

$$(36,14)\qquad \mathrm{st}({}^*q(x_0)) = q(0).$$

又由于$f(t)$在（$-\infty$，$+\infty$）黎曼可积和（36，5）中的积分公式，我们有

$$(36,15)\qquad \mathrm{st}\left({}^*\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} Bf(Bx)dx\right)$$

$$= \mathrm{st}\left({}^*\int_{-\sqrt{B}}^{\sqrt{B}} f(\xi)d\xi\right) = 1.$$

所以成立

$$(36,16)\qquad \mathrm{st}(\,\mathrm{II}\,) = q(\,0\,).$$

最后由（36，10），（36，11），（36，12）和（36，16）得到

$$(36,17)\qquad \mathrm{st}\left({}^*\int_{-{}^*\infty}^{+{}^*\infty} Bf(Bx){}^*q(x)dx\right) = q(o)$$

定理（36，9）证完.

当然，上述$Bf(Bx)$也是函数类$C_0^\infty(R)$上的Delta函数.

我们称$\delta(x) = Bf(Bx)$为正定（或非负）型的Delta函数，如果$f(t)$满足（35，5）中的条件.

特别，注意到（36，2），取

$$(36,18)\qquad f(t) = \frac{2}{\pi}\frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}},$$

则

$$(36,19)\qquad \delta(x) = Bf(Bx)$$

$$= \frac{2B}{\pi}\ \frac{e^{-Bx}}{1+e^{-2Bx}}$$

并不是偶函数.这是本书理论的一个很小的特点，即并不要求$\delta(x)$一定是偶函数.

进一步，按照Delta函数的第二种定义方法，我们有以下定理

(36,20)　若$g\in \mathrm{ft}(R, R)$，对任何标准数$t_1<t_2$有$g\in C([t_1, t_2])$ 又$f(t)$满足（36，5）中的条件，则$Bf(Bx)$是$g(x)$在（$-\infty$，$+\infty$）的Delta函数．

证明从略．

从物理上讲，正定型的Delta 函数对于集中的质量分布的描述是很合适的．

如果我们再查阅一下积分表〔11〕，还可以发现另外一些积分，如

(36,21)
$$\frac{1}{\pi \ln 2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x dx}{\frac{1}{4}e^{x}+e^{-x}}=1,$$

(36,22)
$$\frac{e}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(e^{x-2}-e^{-x})x^{2}}{(e^{x-2}+e^{-x})^{2}}dx=1,$$

(36,23)
$$\frac{1}{(1-C)e}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{x}e^{-e^{x-1}}dx=1.$$

在（36，23）中C为欧拉（Euler）常数．在上述三式中被积表达式不是正定型的．我们也可以由它们出发构成Delta函数．

为了把这种构造过程一般化，在标准分析中我们设

(36,24)　$f\in \mathrm{ft}(R,R)$，$f\in C(R)$，$n\in N$，又α_1，α_2，$\cdots$，$\alpha_n\in R$且满足不等式

$\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n<\alpha_{n+1}$，

这里$\alpha_0=-\infty$，$\alpha_{n+1}=+\infty$；又设当$\alpha_i<x<\alpha_{i+1}$成立

$f(x)=(-1)^{j+i}f_i(x)$，

这里$i=0$，1，$\cdots$，n，而且$f_i(x)\geqslant 0$是$\alpha_i<x<\alpha_{i+1}$上的函数，又$j\in N$；最后设$f(t)$在（$-\infty$，$+\infty$）黎曼可积，且成立

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt=1.$$

对于满足上述条件的$f(t)$，我们将证明$Bf(Bx)$是一个Delta函数．具体地说，是证明以下定理

(36,25)　若$q\in \mathrm{ft}(R,R)$，对任何标准数$t_1<t_2$有$q\in C([t_1,t_2])$，又存在$m\in R$使得对任何x成立$|q(x)|\leqslant m$，又$f(t)$满足(36，24)中的条件，则$Bf(Bx)$是$q(x)$在$*(-\infty,+\infty)$的Delta函数．

证明：计算以下积分

(36,26)
$$
\begin{aligned}
&*\int_{-*\infty}^{+*\infty} Bf(Bx)*q(x)dx\\
&=\left\{*\int_{-*\infty}^{-\sqrt{b}}+*\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}}+*\int_{\sqrt{b}}^{+*\infty}\right\}\\
&\quad Bf(Bx)*q(x)dx,\\
&= \mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III},
\end{aligned}
$$

这里I，II和III分别代表依次的三个积分．不难看出：I和III两项的估计与(36，11)和(36，12)相同．以下估算II．

(36,27)
$$
\begin{aligned}
\mathrm{II} &= *\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} Bf(Bx)*q(x)dx\\
&\qquad (x=b\xi,\ Bx=\xi)\\
&= *\int_{-\sqrt{B}}^{\sqrt{B}} f(\xi)*q(b\xi)d\xi\\
&=\left\{*\int_{-\sqrt{B}}^{a_1}+*\int_{a_1}^{a_2}+\cdots+*\int_{a_n}^{\sqrt{B}}\right\}\\
&\quad f(\xi)*q(b\xi)d\xi\\
&= s_0+s_1+\cdots+s_n,
\end{aligned}
$$

这里$s_0,s_1,\cdots,s_n$分别代表依次的$n+1$个积分．首先估计s_0，

(36,28)
$$
\begin{aligned}
s_0 &= *\int_{-\sqrt{B}}^{a_1} f(\xi)*q(b\xi)d\xi\\
&= (-1)^i *\int_{-\sqrt{B}}^{a_1} f_0(\xi)*q(b\xi)d\xi.
\end{aligned}
$$

对上式用积分第一中值公式（23，2）得

(36,29)　　$s_0 = (-1)^{i} {}^*q(b\xi_0)\int_{-\sqrt{B}}^{\alpha_1} f_0(\xi)d\xi$,

这里 $-\sqrt{B} \leqslant \xi_0 \leqslant \alpha_1$. 因此 $-\sqrt{b} \leqslant b\xi_0 \leqslant b\alpha_1$，故 $b\xi_0$ 是无限小. 再利用 $q(x)$ 的连续性得

(36,30)　　$\mathrm{st}({}^*q(b\xi_0)) = q(o)$.

从而得到

(36,31)　　$\mathrm{st}(s_0) = q(o)(-1)^{i}\int_{-\infty}^{\alpha_1} f_0(\xi)d\xi$.

类似可得

(36,32)　　$\mathrm{st}(s_i) = q(o)(-1)^{i+i}\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f_i(\xi)d\xi$,

$$i = 1, \cdots, n.$$

最后由（36，27）得

(36,33)　　$\mathrm{st}(\mathrm{II}) = \mathrm{st}(s_0) + \mathrm{st}(s_1) + \cdots + \mathrm{st}(s_n)$

$$= q(o)\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)d\xi = q(o).$$

定理（36，25）证完.

进一步，按照Delta 函数的第二种定义方式，我们有以下定理

(36,34)　　若 $q \in \mathrm{ft}(R,R)$，又对任何标准数 $t_1 < t_2$ 有 $q \in C([t_1, t_2])$，又 $f(t)$ 满足（36，24）中的条件，则 $Bf(Bx)$ 是 $q(x)$ 在（$-\infty$，$+\infty$）的 Delta 函数.

我们称 $\delta(x) = Bf(Bx)$ 为有限变号的 Delta 函数，如果 $f(t)$ 满足（36，24）中的条件.

从物理上讲，有限变号的Delta 函数对于描述集中的正负电荷的分布是很合适的.

我们再翻阅一下积分表〔11〕，还可以看到如下一些黎曼反常积分

(36,35) $$\frac{e^{\beta}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\beta t}{1+t^2}dt=1,$$

(26,26) $$\frac{e^{\alpha\beta}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}dx=1.$$

在以上两式中被积表达式无穷次地变化其符号，因此我们必须另外加以考察。

为了能从这种无穷次变号的函数导出Delta 函数，我们只须在M中假设以下条件：

(36,37) $f\in \mathrm{ft}(R,R)$ ，$f\in C(R)$，又$f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 黎曼可积且满足以下条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt=1.$$

然后在M_2引入以下定理：

(36,38) 若$q\in \mathrm{ft}(R,R)$ ，对任何标准数$t_1<t_2$有$q\in C([t_1,t_2])$ 和q在〔t_1,t_2〕有界变化，又存在$m\in R$使得对任何x成立$|q(x)|\leqslant m$，又$f(t)$满足（36,37）中的条件，则$Bf(Bx)$是$q(x)$在$*(-\infty,+\infty)$的Delta函数。

证明：对任何$s_1,s_2\in *R$且$s_1<o<s_2$，还需设$|s_1|$和$|s_2|$足够大，我们研究积分

(36,39) $$*\int_{s_1}^{s_2}Bf(Bx)*q(x)dx$$

$$=\left\{*\int_{s_1}^{-\sqrt{b}}+*\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}}+*\int_{\sqrt{b}}^{s_2}\right\}$$

$$Bf(Bx)*q(x)dx$$

$$= \text{I} + \text{II} + \text{III},$$

这里I，II和III分别代表依次的三个积分．首先估计I．

$$(36,40) \qquad \text{I} = {}^*\int_{s_1}^{-\sqrt{b}} Bf(Bx)\,{}^*q(x)\,dx$$

$$(Bx = \xi,\ x = b\xi)$$

$$= {}^*\int_{s_1B}^{-\sqrt{b}} f(\xi)\,{}^*q(b\xi)\,d\xi.$$

由于$q(x)$在M有界变化，所以${}^*q$在${}^*M$有界变化，利用积分第二中值定理（23，4）得

$$(36,41) \qquad \text{I} = {}^*q(s_{1+})\ {}^*\int_{s_1B}^{\eta} f(\xi)\,d\xi$$

$$+ {}^*q(-\sqrt{b_-})\,{}^*\int_{\eta}^{-\sqrt{B}} f(\xi)\,d\xi,$$

这里$s_1B\leqslant\eta\leqslant-\sqrt{B}$。由于$f(t)$满足（36，37）中的可积性，所以用公设（5，2）通过＊——映射转到＊M则变为＊f（我们这里简记为f）在＊M的可积性；又注意到$-\sqrt{B}$为负无限大，并利用定理（16，36）可得

$$(36,42) \qquad \mathrm{st}\left({}^*\int_{s_1B}^{\eta} f(\xi)\,d\xi\right) = 0,$$

和

$$(36,43) \qquad \mathrm{st}\left({}^*\int_{\eta}^{-\sqrt{B}} f(\xi)\,d\xi\right) = 0.$$

由定理中的条件知在M成立

$$(\forall x)[|q(x)|\leqslant m],$$

由公设（5，2）转到＊M得

$$(\forall x)[|{}^*q(x)|\leqslant {}^*m].$$

我们仍把${}^*m$记为m，故成立

$$|{}^*q(s_{1+})|\leqslant m \text{和} |{}^*q(-\sqrt{b_-})|\leqslant m.$$

这样，由（36，41），（36，42）和（36，43）得

(36,44)　　$st(\text{Ⅰ}) = 0$.

同理可得

(36,45)　　$st(\text{Ⅲ}) = 0$.

现在估算Ⅱ.

(36,46)　　$$\text{Ⅱ} = {}^*\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} Bf(Bx)\,{}^*q(x)\,dx$$

$$(Bx = \xi,\ x = b\xi)$$

$$= {}^*\int_{-\sqrt{B}}^{\sqrt{B}} f(\xi)\,{}^*q(b\xi)\,d\xi.$$

由于$q(x)$有界变化，用积分第二中值定理（23,4）得

(36,47)　　$$\text{Ⅱ} = {}^*q(-\sqrt{b_+})\,{}^*\int_{-\sqrt{B}}^{\eta_1} f(\xi)\,d\xi + {}^*q(\sqrt{b_-})\,{}^*\int_{\eta_1}^{\sqrt{B}} f(\xi)\,d\xi,$$

这里$-\sqrt{B}\leqslant\eta_1\leqslant\sqrt{B}$.进一步变形得

(36,48)　　$$\text{Ⅱ} = {}^*q(o)\,{}^*\int_{-\sqrt{B}}^{\sqrt{B}} f(\xi)\,d\xi$$

$$+ [{}^*q(\sqrt{b_+}) - {}^*q(o)]\,{}^*\int_{-\sqrt{B}}^{\eta_1} f(\xi)\,d\xi$$

$$+ [{}^*q(\sqrt{b_-}) - {}^*q(o)]\,{}^*\int_{\eta_1}^{\sqrt{B}} f(\xi)\,d\xi$$

$$= \rho_1 + \rho_2 + \rho_3,$$

这里ρ_1，ρ_2和ρ_3分别代表依次的三项.由定理（16，36)和(36，37）得

(36,49)　　$st(\rho_1) = q(o)$.

再利用$q(x)$的连续性得

(36,50)　　$st(\rho_2) = 0$

和

(36,51)　　$st(\rho_2) = 0$.

由 (36, 48), (36, 49), (36, 50)和 (36, 51) 得

(36,52)　　$\mathrm{st}(\mathrm{II}) = q(o)$.

由 (36, 39), (36, 44), (36, 45) 和 (36, 52) 得

(36,53)　　$$\mathrm{st}\left(* \int_{s_1}^{s_2} Bf(Bx) *q(x)\, dx\right) = q(o).$$

因为上式中s_1和s_2是任意的，所以成立

(39,54)　　$$\mathrm{st}\left(* \int_{-*\infty}^{+*\infty} Bf(Bx)*q(x)\, dx\right) = q(o).$$

定理 (36, 38) 证完.

与定理 (36, 38) 相平行，按照Dirac Delta函数的第二种定义，我们有以下定理

(36,55)　　若$q \in \mathrm{ft}(R,R)$，对任何标准数$t_1 < t_2$有$q \in C([t_1, t_2])$和q在$[t_1, t_2]$有界变化，又$f(t)$满足 (36, 37) 中的条件，则$Bf(Bx)$是$q(x)$在$(-\infty, +\infty)$的Delta函数)

证明：对任何s_1，$s_2 \in R$，$s_1 < o < s_2$，我们研究积分

(36,56)
$$\begin{aligned} & * \int_{s_1}^{s_2} Bf(Bx)*q(x)dx \\ &= \left\{ * \int_{s_1}^{-\sqrt{b}} + * \int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} + * \int_{\sqrt{b}}^{s_2} \right\} Bf(Bx)*q(x)dx \\ & \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}, \end{aligned}$$

这里I，II和III分别代表依次的三个积分.参考定理 (36, 38) 的证明，我们只需估计I.

(36,57)　　$$\mathrm{I} = * \int_{s_1}^{-\sqrt{b}} Bf(Bx)*q(x)dx$$

$$(Bx = \xi,\ x = b\xi)$$

$$= * \int_{s_1 B}^{-\sqrt{B}} f(\xi) * q(b\xi) d\xi$$

（用积分第二中值定理（23，4））

$$= *q\ (s_{1+})\ * \int_{s_1 B}^{\eta} f(\xi) d\xi$$

$$+ * q(-\sqrt{b_-}) * \int_{\eta}^{-\sqrt{B}} f(\xi) d\xi$$

利用$q(x)$的连续性知 $*q(s_{1+})$ 和$*q(-\sqrt{b_-})$ 都是有限数，又利用（36，42）和（36，43）知上式中的两个积分都是无限小，所以成立

(36,58) $\quad \mathrm{st}(\,\mathrm{I}\,) = 0$.

因此，不难看出定理（36，55）为真，证完.

注意，满足（36，37）的$f(t)$ 可以无穷次地变化其符号，由此引出的$\delta(x) = Bf(Bx)$ 为变号次数不受限制 的 Delta 函数.

如果取

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin t}{t}$$

这时相应的Delta函数为

(36,59) $\quad \Delta_1(x) = Bf\ (Bx)\ = \dfrac{\sin Bx}{\pi x}$,

即为由de Broglie波规格化所导出的Delta函数，其变号 次数不是有限的.

自然，对于每个$q(x) \in C_0^\infty(R)$ ，如 果 $f(t)$ 满 足（36，5），（36，24）和（36，37）三者之一，令 $\delta(x) = Bf(Bx)$，那么$\delta(x)$ 是$q(x)$ 在$*(-\infty, +\infty)$ 和$(-\infty, +\infty)$的Delta函数.

§37 Delta函数的简单性质

在我们的理论中，Delta函数是以$*M$中的点函数表达的。因此，关于Delta函数的性质，我们更主张由其具体表达式直接导出。但是为了和传统的理论相衔接，在此作一些具体说明如下。

1. 假设对每个$t\in R$，$\delta(x)$是$q(t+x)$在$*(-\infty,+\infty)$的Delta函数，则成立

$$(37,1)\qquad \operatorname{st}\left(*\int_{-*\infty}^{+*\infty}\delta(x-t)*q(x)dx\right)=q(t).$$

或者，设对每个$t\in R$，$\delta(x)$是$q(t+x)$在$(-\infty,+\infty)$的Delta函数，则成立

$$(37,2)\qquad \lim_{\substack{s_2\to+\infty\\ s_1\to-\infty}}\operatorname{st}\left(*\int_{s_1}^{s_2}\delta(x-t)*q(x)dx\right)=q(t).$$

今只对(37,1)作一个简单的证明如下。令$x-t=u$，则(37,1)的右端等于

$$(37,3)\qquad \operatorname{st}\left(*\int_{-*\infty}^{+*\infty}\delta(u)*q(u+t)du\right)=q(t).$$

证完。

显然，若$f(t)$和$q(x)$满足定理(36,38)中的条件，令$\delta(x)=Bf(Bx)$，则(37,1)成立。

2. 设$a\in R$且$a\neq o$，又$f(t)$和$q(x)$满足定理(36,38)中的条件，$\delta(x)=Bf(Bx)$，则$|a|\delta(ax)$仍是$q(x)$在$*(-\infty,+\infty)$上的Delta函数。

证明. 当$a>o$，我们有

$$(37,4)\qquad \operatorname{st}\left(*\int_{-*\infty}^{+*\infty}a\delta(ax)*q(x)\,dx\right)$$

$$(令ax=y)$$

$$= \mathrm{st}\left(* \int_{-*\infty}^{+*\infty} \delta(y) * q\left(\frac{y}{a}\right) dy \right) = q(o).$$

当$a<o$，我们有

$$\text{(37,5)} \qquad \mathrm{st}\left(* \int_{-*\infty}^{+*\infty} |a|\delta(ax) * q(x)dx \right)$$

$$(\text{令} ax = y)$$

$$= \mathrm{st}\left(- * \int_{+*\infty}^{-*\infty} \delta(y) \; * q\left(\frac{y}{a}\right)dy \right)$$

$$= \mathrm{st}\left(* \int_{-*\infty}^{+*\infty} \delta(y) \; * q\left(\frac{y}{a}\right)dy \right)$$

$$= y(o).$$

证完.

3.在M中令$u(x) = 1 - e^x$，则$u' = u - 1$，$u(o) = o, u(-\infty) = 1$和$u(+\infty) = -\infty$.

利用公设(5,2)，将以上事实转到$*M$有$*u(x) = 1 - *e^x$ $u*' = u - 1$，$*u(o) = o$，$*u(-*\infty) = 1$和$*u(+*\infty) = -*\infty$等等.

又取$\delta_1(x)$为(33,11)中的Delta函数，设$q(x)$是M中有 界(界为m)的连续函数，今计算以下积分

$$\text{(37,6)} \qquad * \int_{-*\infty}^{+*\infty} \delta_1(*u(x)) * q(x)dx$$

$$(\because x = * \ln(1-u))$$

$$= * \int_{1}^{-*\infty} \delta_1(u) \frac{*q(*\ln(1-u))}{u-1}du$$

$$= * \int_{-*\infty}^{1} \delta_1(u) \frac{*q(*\ln(1-u))}{1-u}du$$

$$= \left\{ * \int_{-*\infty}^{\sqrt{b}} + * \int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} \right.$$

$$\left. + * \int_{\sqrt{b}}^{1} \right\} \delta_1(u) \frac{*q(*\ln(1-u))}{1-u}du$$

$$=\rho_1+\rho_2+\rho_3,$$

这里ρ_1，ρ_2和ρ_3分别记依次的三个积分。

首先计算ρ_1，不难看出

(37,7)
$$|\rho_1| = \left| {}^*\int_{-*\infty}^{-\sqrt{b}} \delta_1(u) \frac{{}^*q({}^*\ln(1-u))}{1-u} du \right|$$
$$\leqslant m \left| {}^*\int_{-*\infty}^{-\sqrt{b}} \delta_1(u) du \right| = \text{无限小。}$$

现在计算ρ_2。不难看出

(37,8)
$$\rho_2 = {}^*\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} \delta_1(u) \frac{{}^*q({}^*\ln(1-u))}{1-u} du$$

（由 $^*M$的积分第一中值定理(23,2)）

$$= \frac{{}^*q({}^*\ln(1-u_0))}{1-u_0}\, {}^*\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} \delta_1(u) du.$$

这 里 $-\sqrt{b}\leqslant u_0 \leqslant \sqrt{b}$，注意到$\sqrt{b}$为无限小，由$q(x)$的连续性得

(37,9)
$$\frac{{}^*q({}^*\ln(1-u_0))}{1-u_0} - {}^*q(o)$$

为无限小。这样，由$\delta_1(u)$的积分性质得

(37.10) $\quad \mathrm{st}(\rho_2) = q(o).$

最后计算ρ_3。不难看出

(37,11)
$$\rho_3 = {}^*\int_{\sqrt{b}}^{1} \delta_1(u) \frac{{}^*q({}^*\ln(1-u))}{1-u} du.$$

特别当$q(x)=1$，即$q(x)$为取常数值的函数，则成立

(37,12)
$$\rho_3 = {}^*\int_{\sqrt{b}}^{1} \frac{\delta_1(u)}{1-u} du$$

$$= \frac{1}{b\sqrt{\pi}}\, {}^*\int_{\sqrt{b}}^{1} e^{-\left(\frac{u}{b}\right)^2} \frac{du}{1-u}.$$

这时，在$*M$中ρ_3是个发散积分。于是对(37,6)的积分有以下等式

(37,13) $$*\int_{-*\infty}^{+*\infty}\delta(*u(x))*q(x)dx$$

$$=q(o)+\text{无限小}+\rho_3.$$

而ρ_3是可能发散的一个积分，因此(37,13)左端的积分不见得有标准值.

4.令$\varphi(x)=x^2-a^2$，$a\in R$且$a>o$，则$\varphi'(x)=2x$，$\varphi(a)=\varphi(-a)=o$.

当$x>o$时，$x=\sqrt{\varphi+a^2}$。当$x<o$时，$x=-\sqrt{\varphi+a^2}$.

仍设$q(x)$是M中有界(界为m)的连续函数，$\delta_l(x)$如(33,11)所表示，今计算如下的积分

(37,14) $$*\int_{-*\infty}^{+*\infty}\delta_l(*\varphi(x))*q(x)dx$$

$$=\left\{*\int_{-*\infty}^{0}+*\int_{0}^{+*\infty}\right\}\delta_l(*\varphi(x))*q(x)dx$$

$$=\text{I}+\text{II},$$

这里I和II分别代表依次的两个积分。今首先计算I.

(37,15) $$\text{I}=*\int_{-*\infty}^{0}\delta_l(*\varphi(x))*q(x)dx$$

$$=*\int_{+*\infty}^{-a^2}\delta_l(\varphi)\frac{*q(-\sqrt{\varphi+a^2})}{-2\sqrt{\varphi+a^2}}d\varphi$$

$$=*\int_{-a^2}^{+*\infty}\delta_l(\varphi)\frac{*q(-\sqrt{\varphi+a^2})}{2\sqrt{\varphi+a^2}}d\varphi$$

$$=\left\{*\int_{-a^2}^{-\sqrt{b}}+*\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}}\right.$$

$$\left.+*\int_{\sqrt{b}}^{+*\infty}\right\}\delta_l(\varphi)\frac{*q(-\sqrt{\varphi+a^2})}{2\sqrt{\varphi+a^2}}d\varphi$$

$$= \rho_1 + \rho_2 + \rho_3,$$

这里ρ_1，ρ_2和ρ_3分别代表依次的三个积分。由于当$\varphi \leqslant -\sqrt{b}$时成立

$$|\delta_1(\varphi)| \leqslant r,$$

且r是个无限小的数，故成立估计

(37,16) $$|\rho_1| \leqslant \frac{mr}{2} \cdot {}^*\int_{-a^2}^{-\sqrt{b}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi + a^2}}$$

$$= mr\sqrt{-\sqrt{b} + a^2}$$

$$= \text{无限小}.$$

显然，在(37,16)的计算中用到了$*M$中的黎曼反常积分。进一步可算得

(37,17) $$\mathrm{st}(\rho_2) = \frac{q(-a)}{2a}$$

和

(37,18) $$\mathrm{st}(\rho_3) = o.$$

由(37,16)，(37,17)和(37,18)得

(37,19) $$\mathrm{st}(\mathrm{I}) = \frac{q(-a)}{2a}$$

类似地可得

(37,20) $$\mathrm{st}(\mathrm{II}) = \frac{q(a)}{2a}.$$

最后得到

(37,21) $$\mathrm{st}\left({}^*\int_{-*\infty}^{+*\infty} \delta_1(x^2 - a^2) \, {}^*q(x)\,dx \right)$$

$$= \frac{q(a) + q(-a)}{2a}.$$

5.一般地，在M设$\varphi \in \mathrm{st}(R,R)$，$\varphi(x)$和$\varphi'(x)$在$R$连续。令$A = |1, n|$是$N$的一个片段，$\beta_1 = -\infty$，$\beta_{n+1} = +\infty$。设对

每个$i\in A$，存在β_i，γ_i，α_i和λ_i满足

(37,22) $\beta_i<\gamma_i<\alpha_i<\lambda_i$.

如果$i\in A$与$i+1\in A$同时成立，则假设

(37,23) $\lambda_i<\beta_{i+1}$.

进一步设$\{\alpha_i,\ i\in A\}$为$\varphi(x)$所有零点的集合，$\varphi'(\alpha_i)\neq o$ 对所有$i\in A$成立；又设$\{\beta_i,\ i\neq 1\wedge i\in A\}$为$\varphi'(x)$零点的集合；且设$\varphi(x)$在$[\beta_i,\ \beta_{i+1}]$严格单调.

进一步，在M设$q(x)$连续，有界且有界变化，$f(t)$满足(36,37)中的条件，$\delta(x)=Bf(Bx)$。然后研究积分

(37,24)
$$* \int_{-*\infty}^{+*8}\delta(*\varphi(x)) * q(x)dx$$
$$= * \sum_{i\in *A} * \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}}\delta(*\varphi(x)) * q(x)dx.$$

以下研究(37,24)中和号中一个典型项

(37,25)
$$* \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}}\delta(*\varphi(x)) * q(x)dx$$
$$=\left\{ * \int_{\beta_i}^{\gamma_i} + * \int_{\gamma_i}^{\lambda_i} + * \int_{\lambda_i}^{\beta_{i+1}}\right\}$$
$$\delta(*\varphi(x)) * q(x)dx$$
$$(令 * \varphi(x)=u,\ x= * \varphi^{-1}(u))$$
$$=\left\{ * \int_{\varphi(\beta_i)}^{\varphi(\gamma_i)} + * \int_{\varphi(\gamma_i)}^{\varphi(\lambda_i)}\right.$$
$$\left. + * \int_{\varphi(\gamma_i)}^{\varphi(\beta_{i+1})}\right\}\delta(u)\frac{*q(*\varphi^{-1}(u))}{\varphi^{*\prime}(\varphi^{-1}(u))}du.$$
$$=\mathrm{I}_i+\mathrm{II}_i+\mathrm{III}_i.$$

这里I_i，II_i和III_i分别代表依次的三项积分。不伤一般性 我们设

(37,26) $$\varphi(\beta_i)<\varphi(\gamma_i)<\varphi(\alpha_i)=o<\varphi(\lambda_i)<\varphi(\beta_{i+1}).$$

首先计算II_i. 由于

(37,27) $$\mathrm{II}_i = {}^*\int_{\varphi(\gamma_i)}^{\varphi(\lambda_i)} \delta(u)\frac{{}^*q(\varphi^{-1}(u))}{\varphi^{*\prime}(\varphi^{-1}(u))}du$$

我们不难得到

(37,28) $$\mathrm{st}(\mathrm{II}_i) = \frac{q(\varphi^{-1}(o))}{\varphi'(\varphi^{-1}(o))} = \frac{q(\alpha_i)}{\varphi'(\alpha_i)}$$

因此要得到公式

(37,29) $$\mathrm{st}\left({}^*\int_{-*\infty}^{+*\infty} \delta({}^*\varphi(x))\,{}^*q(x)dx\right) = \sum_{i\in A}\frac{q(\alpha_i)}{|\varphi'(\alpha_i)|}.$$

除了假设此级数在M收敛之外，还必须加一些补充条件.

这些补充条件必须使得

(37,30) $${}^*\sum_{i\in {}^*A}(\mathrm{I}_i+\mathrm{III}_i)$$

为无限小. 请注意，积分I_i在$\varphi(\beta_i)=u$时，被积函数(在${}^*M$)有奇性，III_i在$\varphi(\beta_{i+1})$时，被积函数有奇性。因此，(37,30)的和并不自然地就是无限小.

6.如果在${}^*M$中函数$\delta(x)$足够多次地可微，$q(x)$在M足够多次可微，那么对某个$n\in N$，成立分部积分公式

(37,31) $${}^*\int_{-*\infty}^{+*\infty}\delta^{(n)}(x)\,{}^*q(x)dx = \mathrm{I}+\mathrm{II}$$

这里

(37,32) $$\mathrm{I} = [\delta^{(n-1)}(x)\,{}^*q(x)+\cdots+(-1)^{n-1}\,{}^*q^{(n-1)}(x)\delta(x)]_{-*\infty}^{+*\infty}$$

和

(37,33) $$\mathrm{II} = (-1)^{n}\,{}^*\int_{-*\infty}^{+*\infty}\delta(x)\,{}^*q^{(n)}(x)dx.$$

如果(37,32)中的 I 满足st(I) = o，又设在（37,33）中$\delta(x)$是$q^{(n)}(x)$在$*(-\infty, +\infty)$的Delta函数,则成立

(37,34) $$\mathrm{st}\left(*\int_{-*\infty}^{+*\infty}\delta^{(n)}(x)q(x)\,dx\right)$$
$$=(-1)^n\mathrm{st}\left(*\int_{-*\infty}^{+*\infty}\delta(x)q^{(n)}(x)dx\right)$$
$$=(-1)^n q^{(n)}(o).$$

注意，在(37,32)中的 I 并不是无条件地满足st(I) = o，例如当$\delta(x)=\delta_3(x)$（见(33,59)）而$q(x)=e^{x^2}$，就不能保证st(I) = o。

但如果取$q(x)\in C_0^\infty(R)$，则总可保证 I = 0，那么只需设$\delta(x)$是$q^{(n)}(x)$在$*(-\infty, +\infty)$的Delta函数就可以保证(37,34)成立。

§38 Delta函数与傅里叶展开

在物理学中已广泛地使用了由正交函数系所产生的Delta函数，它们与前面几节所研究的Delta函数不相同，是另一类型的Delta函数。由于物理学家已经公认它们也是Delta函数，所以我们就不必再取新的名字了。

在M中设$a<b$，$\{\varphi_n(x)\}$是$[a,b]$上的完全正交归一的函数序列，它满足以下条件（参看[24]）

(38,1) $$\int_a^b\varphi_j^+(x)\varphi_k(x)dx=\delta_{jk}$$

这里$\varphi_j^+(x)$为$\varphi_j(x)$的复共轭，又

(38,2) $$\delta_{jk}=\begin{cases}1, & i=k\\ 0, & j\neq k.\end{cases}$$

在M我们以$L_2[a,b]$记$[a,b]$上平方L可积的函数空间，设$f(x)\in L_2[a,b]$。现在在$L_2[a,b]$中引入

(38,3) $$f_\infty(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(x),$$

其中

(38,4) $$a_n=\int_a^b f(x)\varphi_n^+(x)dx.$$

将(38,4)代入(38,3)得到

(38,5) $$f_\infty(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b\varphi_n^+(y)\varphi_n(x)f(y)dy$$
$$=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{n}\int_a^b\varphi_n^+(y)\varphi_n(x)f(y)dy.$$

由于(38,5)的右端当$k\to\infty$时极限存在，故由定理(16,36)得

(38,6) $$f_\infty(x)=\mathrm{st}\left(*\sum_{n=1}^{k}*\int_a^b\varphi_n^+(y)\varphi_n(x)f(y)dy\right.$$
$$=\mathrm{st}\left(*\int_a^b f(y)*\sum_{n=1}^{K}\varphi_n^+(y)\varphi_n(x)dy\right),$$

这里$K\in *N$为正无限大，而f，φ自然地表示了在$*M$中的$*f$和$*\varphi$。以下也应如此理解，即省略了“$*$”号。

由于$\{\varphi_n(x)\}$的完全性，可知在$L_2[a,b]$中$f(x)$与$f_\infty(x)$相等。

请注意，在M中

(38,7) $$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\varphi_n^+(y)\varphi_n(x)$$

一般没有确切的意义。但在$*M$中

(38,8) $$\delta(k,x,y)=*\sum_{n=1}^{k}\varphi_n^+(y)\varphi_n(x)$$

对一切$k\in *N$是有确切意义的，而且成立

(38,9) $$f_\infty(x)=\mathrm{st}\left(*\int_a^b\delta(K,x,y)f(y)dy\right).$$

如果注意到在$L_2[a,b]$中$f_\infty(x)$与$f(x)$相等，则$*M$中的函数$\delta(K,x,y)$构成$L_2[a,b]$到$L_2[a,b]$的单位算子。按物理学上的约定，我们又称$\delta(K,x,y)$为$L_2[a,b]$上的Delta函数。

进一步，如果在$*M$中记

$$(38,10)\qquad f_k(x)= * \int_a^b \delta(k,x,y)f(y)dy.$$

这里$k\in *N$。那么当k是无限大时，$\mathrm{st}(f_k(x))$与$f(x)$在$L_2[a,b]$中相等。

特别，若$\varphi_1(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}=$常数，则对一切$k\in N$成立

$$(38,11)\qquad * \int_a^b \delta(k,x,y)dy=1.$$

以上这些是完全正交系$\{\varphi_n(x)\}$的重要性质。

【例 1】 我们取$\varphi_n(x)$为指数形状的三角函数系

$$(38,12)\qquad \varphi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2l}}e^{i n \pi x/l}$$

定义域为$-l\leqslant x\leqslant l(l>o)$，这里$n$为整数。

根据(38,8)，我们在这里取

$$(38,13)\qquad \delta(k,x,y)=\frac{1}{2l} * \sum_{n=-k}^{k} e^{\frac{-in\pi(y-x)}{l}}$$

$$=\frac{1}{2l}\left\{\frac{* \sin\left[\frac{(2k+1)\pi(y-x)}{2l}\right]}{* \sin\frac{\pi(y-x)}{2l}}\right.$$

现在在M设$f(x)\in L_2[-l,l]$，且$f(x)$在$(-l,l)$内的每个闭区间上连续和有界变化，令

$$(38,14)\qquad f_\infty(x)=\lim_{k\to\infty}\int_{-l}^{l}\delta(k,x,y)f(y)dy,$$

则对任意$x\in(-l,l)$，成立$f_\infty(x)=f(x)$（请参看[1]）。

由(38,12)可直接看出，对(38,13)中的$\delta(k,x,y)$成立

(38,15) $$ {}^*\int_{-1}^{1}\delta(k,x,y)dy = 1. $$

如果仿照(38,10)，对每个$k\in {}^*N$仍令

(38,16) $$ f_k(x) = {}^*\int_{-1}^{1}\delta(k,x,y)f(y)dy, $$

则当$K\in {}^*N$且K是无限大时成立

(38,17) $$ f(x) = \mathrm{st}(f_K(x)), $$

【例 2】 Legendre多项式.（请参看列别捷夫[12]）.当n是非负整数（即$n=0$或$n\in N$）令

(38,18) $$ P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\{(x^2-1)^n\}, $$

则成立以下正交关系

(38,19) $$ \int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0, & m\neq n \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m=n. \end{cases} $$

注意到$P_0(x)=1$.若对每个$k\in {}^*N$令

(38,20) $$ \delta(k,x,y) = {}^*\sum_{n=0}^{k}\left(n+\frac{1}{2}\right)P_n(x)P_n(y) $$

$$ = \frac{k+1}{2}\cdot\frac{P_{k+1}(x)P_k(y)-P_{k+1}(y)P_k(x)}{x-y} $$

对上式中的$\delta(k,x,y)$，不难验证成立以下关系

(38,21) $$ {}^*\int_{-1}^{1}\delta(k,x,y)dy = 1\ . $$

现在在M设$f(x)\in L_2[-1,1]$,又设$f(x)$在$(-1,1)$是分段光滑的连续函数，令

(38,22) $$ f_\infty(x) = \lim_{k\to\infty}\int_{-1}^{1}\delta(k,x,y)f(y)dy, $$

则对每个$x\in(-1,1)$成立$f_\infty(x)=f(x)$。如果对每个$k\in{}^*N$，仍令

$$(38,23)\qquad f_k(x)={}^*\int_{-1}^{1}\delta(k,x,y)f(y)dy,$$

则当$K\in{}^*N$且K为无限大时成立

$$(38,24)\qquad f(x)=\mathrm{st}(f_K(x)).$$

【例 3】 Hermite多项式．（请参看[12]）．若n是非负整数，定义

$$(38,25)\qquad H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}.$$

不难看出成立以下正交关系

$$(38,26)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}H_m(x)H_n(x)dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ 2^n n!\sqrt{\pi}, & m=n.\end{cases}$$

同样，对$k\in{}^*N$令

$$(38,27)\qquad \delta(k,x,y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,{}^*\sum_{n=0}^{k}\frac{H_n(x)H_n(y)}{2^n n!},$$

则成立

$$(38,28)\qquad {}^*\int_{-{}^*\infty}^{+{}^*\infty}e^{-x^2}\delta(k,x,y)dy=1.$$

现在在M设$f(x)$使得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|e^{-x^2}|f^2(x)|dx$$

收敛，且在$(-\infty,+\infty)$内的任何闭区间上是分段光滑的连续函数．令

$$(38,29)\qquad f_\infty(x)=\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)e^{-y^2}\delta(k,x,y)dy,$$

则对每个$x\in(-\infty,+\infty)$成立$f_\infty(x)=f(x)$。

如果对每个$k\in{}^*N$，仍令

$$(38,30)\qquad f_k(x)={}^*\int_{-{}^*\infty}^{+{}^*\infty}e^{-y^2}\delta(k,x,y)f(y)dy,$$

则当$K\in{}^*N$且K为无限大时成立

$$(38,31)\qquad f(x)=\mathrm{st}(f_K(x)).$$

【例 4 】Laguerre 多 项式.（请参看[12]）.对n的非 负 整数，定义

$$(38\cdot32)\qquad L_n^\alpha(x)=e^x\frac{x^{-\alpha}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+\alpha}),$$

这里$\alpha>-1$.不难看出$L_0^\alpha(x)=1$，和成立以下正交关系

$$(38,33)\qquad \int_0^\infty e^{-x}x^\alpha L_m^\alpha(x)L_n^\alpha(x)dx$$

$$=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}, & m=n.\end{cases}$$

现在，对$k\in{}^*N$，令

$$(38,34)\qquad \delta(k,x,y)={}^*\sum_{n=0}^{k}\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}L_n^\alpha(x)L_n^\alpha(y),$$

则成立

$$(38,35)\qquad {}^*\int_0^{{}^*\infty}e^{-y}y^\alpha\delta(k,x,y)dy=1.$$

现在在M设$f(x)$使得

$$\int_0^\infty e^{-\frac{y}{2}}y^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}|f(y)|dy$$

收敛且在$(0,\infty)$的任何有限开区间都是分段光滑的连续函数，令

$$(38,36)\qquad f_\infty(x)=\lim_{k\to\infty}\int_0^\infty e^{-y}y^\alpha\delta(k,x,y)f(y)dy,$$

则对每个$x\in(0,\infty)$成立$f_\infty(x)=f(x)$.如果对每个$k\in{}^*N$定 义

(38,37) $f_k(x) = {}^*\int_0^{+\infty} e^{-y} y^2 \delta(k,x,y) f(y)\,dy$

则当$K \in {}^*N$且K是无限大时成立

(38,38) $f(x) = \mathrm{st}(f_K(x))$.

这样，在M中如果$\{\varphi_n(x)\}$是区间$[a,b]$上以$\rho(x)$为权函数的完全正交归一的函数序列，则仍可按(38·8)定义$\delta(k,x,y)$，如果在M存在某个函数集合Φ，当$f(x)\in\Phi$时，以下极限存在

(38,39) $f_\infty(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \int_a^b \rho(y)\delta(k,x,y)f(y)dy$,

而且对任何$x\in(a,b)$成立$f_\infty(x) = f(x)$.那么对$k\in {}^*N$可定义

(38,40) $f_k(x) = {}^*\int_a^b \rho(y)\delta(k,x,y)f(y)dy$.

当$K\in {}^*N$且K是无限大时成立

$$f(x) = \mathrm{st}(f_K(x)).$$

这时称$\delta(K,x,y)$是区间$[a,b]$上以$\rho(y)$为权的关于函数类Φ的Delta函数.特别当$\varphi_1(x)$ = 常数时成立

(38,41) $\int_a^b \rho(y)\delta(k,x,y)dy = 1$.

以上讨论的是傅里叶级数，以下将讨论傅里叶变换.我们从举例入手.

【例5】 在M，当$x\in(-\infty,+\infty)$时，令

(38,42)
$$\begin{cases} \varphi(\lambda,x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\lambda x} \\ \varphi^+(\lambda,x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\lambda x} \end{cases}.$$

这时正交性条件是考察

(38,43) $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^+(\lambda',x)\varphi(\lambda,x)dx$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(\lambda-\lambda')x}dx$$

$$=\lim_{\beta\to\infty}\int_{-\beta}^{\beta}e^{i(\lambda-\lambda')x}dx=?$$

由于这个积分在M不收敛，于是在标准分析中讨论它就遇到了困难。

但在$*M$中，对$\alpha\in *R$和$\alpha>0$令

$$\Delta(\alpha,\lambda,\lambda')=*\int_{-\alpha}^{\alpha}\varphi^{+}(\lambda',x)\varphi(\lambda,x)dx \tag{38,44}$$

$$=\frac{1}{2\pi}*\int_{-\alpha}^{\alpha}e^{i(\lambda-\lambda')x}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin\alpha(\lambda-\lambda')}{\lambda-\lambda'}.$$

当α是无限大时，$\Delta(\alpha,\lambda,\lambda')$是已知的Delta函数（参看(33·34))注意：(38,44)是正交性的推广。

现在在M中设$f\in \mathrm{ft}(R,R)$，$|f|$在$(-\infty,\ +\infty)$黎曼可积，$f\in C(R)$，且$f(x)$在R的每个闭区间上有界变化。(参看[1])。又对每个$\beta\in *R$且$\beta>0$令

$$\delta(\beta,x,y)=*\int_{-\beta}^{\beta}\varphi(\lambda,x)\varphi^{+}(\lambda,y)d\lambda \tag{38,45}$$

$$=\frac{1}{2\pi}*\int_{-\beta}^{\beta}e^{+\lambda(x-y)}d\lambda$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin\beta(x-y)}{x-y}.$$

当β是无限大时，$\delta(\beta,x,y)$是已知的Delta函数，请参看(33,34)。对于上述的$f(x)$，令

$$f_{\infty}(x)=\lim_{\beta\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\beta,x,y)f(y)dy, \tag{38,46}$$

则在M中已有结果$f_{\infty}(x)=f(x)$，对任何$x\in R$成立。这样，如果令

(38,47) $$f_\beta(x) = *\int_{-*\infty}^{+*\infty}\delta(\beta,x,y)f(y)dy,$$

则当$B\in *R$且为正无限大时成立

(38,48) $$f(x) = \mathrm{st}(f_B(x)).$$

【例 6】 在M，对任何λ，$x\in[0,\infty)$，令

(38,49) $$\varphi(\lambda,x) = (\lambda x)^{\frac{1}{2}}J_\nu(\lambda x),$$

这里$\nu\geqslant -\frac{1}{2}$，$J_\nu$为Bessel函数。在$*M$中，对$\alpha\in *R$和$\alpha>0$，令

(38,50) $$\begin{aligned}&\varDelta(\alpha,\lambda,\lambda')\\ &= *\int_0^\alpha \varphi^+(\lambda',x)\varphi(\lambda,x)dx\\ &= \sqrt{\lambda\lambda'}\ *\int_0^\alpha xJ_\nu(\lambda'x)J_\nu(\lambda x)dx.\end{aligned}$$

当α是正无限大时，由下面的陈述可知，$\varDelta(\alpha,\lambda,\lambda')$也是一个Delta函数。

在M中，设函数$f(x)$在$[0,\infty)$定义，在$(0,\infty)$内的任何闭区间都是连续的和有界变化的函数，并满足

(38,51) $$\int_0^\infty |f(x)|dx$$

取有限值（请参看[18]）.

现在对$\beta\in *R$和$\beta>0$，令

(38,52) $$\begin{aligned}&\delta(\beta,x,y)\\ &= *\int_0^\beta \varphi(\lambda,x)\varphi^+(\lambda,y)d\lambda\\ &= \sqrt{xy}\ *\int_0^\beta \lambda J_\nu(\lambda x)J_\nu(\lambda y)d\lambda.\end{aligned}$$

对于满足上述条件的$f(x)$，令

(38,53) $$f_\infty(x) = \lim_{\beta\to\infty}\int_0^\infty \delta(\beta,x,y)f(y)dy,$$

则在M，对任何$x\in(0,\infty)$，成立$f_\infty(x)=f(x)$。这样，令

$$(38,54)\qquad f_\beta(x)={}^*\int_0^{+\infty}\delta(\beta,x,y)f(y)dy,$$

则当$B\in {}^*R$且为正无限大时成立

$$(38,55)\qquad f(x)=\mathrm{st}(f_B(x)).$$

因此，我们有理由把$*M$中的函数$\delta(B,x,y)$看作是M中的满足上述条件的函数$f(y)$的Delta函数。当然这与本节前面各节的Delta函数不是一个类型的。

在这里，由于在(38,49)的$\varphi(\lambda,x)$中的变量λ和x是对称的，所以成立

$$(38,56)\qquad \delta(\beta,x,y)=\Delta(\beta,x,y).$$

现在讨论一般的情况。这时，在M中若$\lambda,x\in R$，给定了二元函数

$$(38,57)\qquad \varphi(\lambda,x),$$

以$\varphi^+(\lambda,x)$记它的复共轭函数。

此外，给了定义在R上的函数集Φ，不伤一般性，可设Φ包含$C_0^\infty(R)$为它的子集。

现在对$\alpha\in {}^*R$且$\alpha>0$，定义

$$(38,58)\qquad \Delta(\alpha,\lambda,\lambda')={}^*\int_{-\alpha}^{\alpha}\varphi^+(\lambda',x)\varphi(\lambda,x)dx.$$

如果当α是正无限大时，对$f\in\Phi$成立

$$(38,59)\qquad \mathrm{st}({}^*\int_{-{}^*\infty}^{+{}^*\infty}f(\lambda')\Delta(\alpha,\lambda,\lambda')d\lambda'=f(\lambda),$$

则称$\Delta(\alpha,\lambda,\lambda')$是$\Phi$上的Delta函数，也可称$\varphi(\lambda,x)$对$\Phi$按$\lambda$构成正交归一的连续谱系统。

进一步，对$\beta\in {}^*R$和$\beta>0$，定义

$$(38,60)\qquad \delta(\beta,x,y)={}^*\int_{-\beta}^{\beta}\varphi^+(\lambda,x)\varphi(\lambda,y)d\lambda.$$

如果当β是正无限大时，对$f\in\Phi$成立

$$(38,61) \qquad f(x) = \mathrm{st}\left({}^{*}\int_{-^{*}\infty}^{+^{*}\infty} \delta(\beta, x, y) f(y) dy \right),$$

则称$\delta(\beta, x, y)$是Φ上的Delta函数，并且称$\varphi(\lambda, x)$对Φ按λ是完全的连续谱系统.

如果对于(38·57)中的$\varphi(\lambda, x)$，相应的$\varDelta(\alpha, \lambda, \lambda')$和$\delta(\beta, x, y)$当$\alpha, \beta$为正无限大时都是$\Phi$上的Delta函数，则称$\varphi(\lambda, x)$对$\Phi$按$\lambda$构成完全的正交归一的连续谱系统.

当$\varphi(\lambda, x)$中的λ和x是对称的时候，成立(38,56)，则$\varphi(\lambda, x)$的完全正交归一性由一个Delta函数所刻画.

总之，在本章中，自§33至§37，所讨论的是最原始的Delta函数，而§38所讨论的是由完全正交归一系所派生的Delta函数（可以称之为正交系的Delta函数）.两者在物理学中都有广泛的应用.这二者是有所不同的.前者可以写成一元函数的形式，如$\delta(x)$，而后者则不一定能表为一元函数，常常要写成二元函数的形式，如$\delta(x, y)$.但它们都对M中的某类函数起着筛取的作用，好像是一个单位算子.

第七章　奇异积分

本章讨论的中心是奇异积分以及有关的问题，这些问题都是源远流长的。作者在这里提供一点自己的看法，这些看法虽属初步，但却是引发作者写这本书的原始动机。

§39　定义不完全函数的积分

作为启发，我们首先在M中讨论，设

$$f(x)=\begin{cases}1, & -2\leqslant x\leqslant -1,\\ 1, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases} \tag{39, 1}$$

但对$-1<x<1$，$f(x)$尚未定义。现在问

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx=?\ . \tag{39, 2}$$

要回答此问题，唯一的办法是对函数$f(x)$在$-1<x<1$进行补充定义。这种补充定义的方法很多，例如令

$$g_1(x,\lambda)=\begin{cases}1, & -2\leqslant x\leqslant -1,\\ \lambda x^2+1-\lambda, & -1<x<1,\\ 1, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases} \tag{39, 3}$$

那么

$$\begin{aligned}&\int_{-2}^{2} g_1(x,\lambda)dx \\ &=2+\int_{-1}^{1}(\lambda x^2+1-\lambda)dx \\ &=\frac{4}{3}(3-\lambda).\end{aligned} \tag{39, 4}$$

当λ在R中变化时，（39，4）中的积分可以取到R中的每一个

数。如果把（39,4）中的积分每一个值看成（39,2）中的积分的可能值，则（39,2）中的积分可以取到R中的任意一个数。

进一步，如果令

$$(39,\ 5)\qquad g_2(x)=\begin{cases}1, & -2\leqslant x\leqslant -1,\\ \dfrac{1}{|x|}, & -1<x<1,\\ 1, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$$

那么

$$(39,\ 6)\qquad \int_{-2}^{2} g_2(x)dx$$

为奇异积分。我们也不能排斥（39,6）是（39,2）中积分的一种可能的解答。

总之，对函数$f(x)$进行不同的补充定义将对积分（39,2）给出不同的解答。

在标准分析M中，一般可引进以下定义

（39，7）　若$a<b$，$q\subset[a,b]$，和$f\in \mathrm{ft}([a,b]\backslash q,R)$，称$g$是$f$在$[a,b]$的黎曼可积的延拓，如果$g\in \mathrm{ft}([a,b],R)$，$g$在$[a,b]$黎曼可积而且对每个$x\in[a,b]\backslash q$成立$g(x)=f(x)$.

进一步可以定义

（39，8）　若$a<b$，$q\subset[a,b]$，$f\in \mathrm{ft}([a,b]\backslash q,R)$和$g$是$f$在$[a,b]$的黎曼可积的延拓，则称$\int_a^b g(x)dx$是$\int_a^b f(x)dx$的一个解答。

在以上思想的启发之下，在M_2可以引入以下定义

（39，9）　若$a,b\in R$，$a<b$，$q\subset[a,b]$和$f\in \mathrm{ft}([a,b]\backslash q,R)$，称$g$是$f$在$[{*a},{*b}]$的黎曼可积（或$L$可积）的${*M}$近似延拓，如果$g\in {*\mathrm{ft}}([{*a},{*b}],R$（或复

数域$\mathbb{C}$))，$*$〔g在〔$*a,*b$〕黎曼可积(或L可积)〕和对每个$x\in[a,b]\backslash q$和$y\in \text{mon}(*x)$成立$g(y)-*f(y)$是无限小.

进一步定义

(39,10) 若$a,b\in R$，$a<b$，$q\subset[a,b]$，$f\in \text{ft}([a,b]\backslash q, R)$和$g$是$f$在〔$*a,*b$〕的黎曼可积（$L$可积）的$*M$近似延拓，则称$*\int_{*a}^{*b} g(x)dx$是$\int_a^b f(x)dx$在$*M$的一个近似解答。特别，若$*\int_{*a}^{*b} g(x)dx$是有限的，则称$\text{st}\left(*\int_{*a}^{*b} g(x)dx\right)$是$\int_a^b f(x)dx$的一个标准解.

不难看出，若f在有限区间〔a,b〕黎曼可积（或L可积），g是f在〔$*a,*b$〕的黎曼可积（或L可积）的$*M$近似延拓，则成立

(39,11) $$\text{st}\left(*\int_{*a}^{*b} g(x)dx\right)=\int_a^b f(x)dx.$$

请注意，在本书中，必须是f在〔a,b〕点点有定义，才会成立f在〔a,b〕黎曼可积（或L可积）.

以下研究一个具体例子，在M中研究以下积分

(39,12) $$i(\lambda)=\int_0^{\frac{1}{2}} f_\lambda(t)dt,$$

其中$f_\lambda(t)=t^\lambda$。当$\lambda\geqslant 0$时，这个积分并不奇异，这时

$$i(\lambda)=\frac{1}{\lambda+1}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda+1}-o^{\lambda+1}\right]$$

$$=\frac{1}{\lambda+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda+1}.$$

如果把复变函数中的解析开拓原理用到$i(\lambda)$上，那么对一切$\lambda(\lambda\neq-1)$都有

(39,13) $$i(\lambda)=\frac{1}{\lambda+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda+1}.$$

特别当$\lambda=-3/2$时，代入（39,13)得

(39,14) $$i\left(-\frac{3}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{3}{2}}dt=-2\sqrt{2}.$$

这就是用解析开拓方法对奇异积分给出了一个实数值。

现在我们取σ是正无限小，在$*M$定义如下的函数

(39,15) $$g_\lambda(t)=\begin{cases} t^\lambda, & \sigma\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}, \\ 0, & 0\leqslant t<\sigma, \end{cases}$$

并且令

(39,16) $$\begin{aligned} I(\lambda) &= *\int_0^{\frac{1}{2}} g_\lambda(t)dt \\ &= \frac{1}{\lambda+1}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda+1}-\sigma^{\lambda+1}\right]. \end{aligned}$$

当$\lambda>-1$时成立

(39,17) $$\mathrm{st}(I(\lambda))=\frac{1}{\lambda+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda+1},$$

即

(39,18) $$\mathrm{st}(I(\lambda))=i(\lambda).$$

但当$\lambda=-3/2$时，由（39,16)得

(39,19) $$I\left(-\frac{3}{2}\right)=2\left[\sigma^{-\frac{1}{2}}-\sqrt{2}\right],$$

即$I\left(-\frac{3}{2}\right)$是正无限大。这时，（39,14）与（39,19)两个结果之间相差为无限大。那么倒底哪一个结果是合理的呢？如果局限在标准分析的范围之内，这个问题是不好回答的。而现在我们可以回答这一问题了。

对$\lambda<0$时情况，按我们定义，g_λ是f在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$的黎曼可积

的$*M$近似延拓，所以$I(\lambda)$是$\int_0^{\frac{1}{2}} t^\lambda dt$在$*M$的一个近似解。

另方面，我们又可以引进下面的函数

$$(39,20)\qquad \tilde{g}_\lambda(t)=\begin{cases} t^\lambda, & \sigma\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},\\ \sigma^\lambda+K(t-\sigma), & 0\leqslant t<\sigma,\end{cases}$$

这里σ是正无限小，$K\in *R$是任意的。那么$\tilde{g}_\lambda(t)$是$f(t)$的$\left[0,\frac{1}{2}\right]$的黎曼可积的$*M$近似延拓。记

$$(39,21)\qquad I_1(\lambda)=*\int_0^{\frac{1}{2}}\tilde{g}_\lambda(t)dt$$

$$=*\int_0^\sigma[\sigma^\lambda+K(t-\sigma)]\,dt+*\int_\sigma^{\frac{1}{2}}t^\lambda dt$$

$$=\frac{\lambda}{\lambda+1}\sigma^{\lambda+1}+\frac{1}{\lambda+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda+1}-\frac{K}{2}\sigma^2.$$

如果特别取

$$(39,22)\qquad K=\frac{2\lambda}{\lambda+1}\sigma^{\lambda-1},$$

那么

$$(39,23)\qquad I_1(\lambda)=\frac{1}{\lambda+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda+1}.$$

由于$i(\lambda)=\mathrm{st}(I_1(\lambda))$，所以$i(\lambda)$是$\int_0^{\frac{1}{2}} t^\lambda dt$的一个标准解。

综上所述，在我们的理论中，$I(\lambda)$和$i(\lambda)$都是所允许的解答。当然还有别的解答。例如在(39,21)中令K在$*R$中任意变动，那么$I_1(\lambda)$可取到$*R$中的任意一个数。这就是说，当$\lambda<0$时$*R$中任何一个数都可能成为奇异积分

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^\lambda dt$$

的一个解答。

因此，作者认为，在解答物理学中的发散积分时，必须有其它物理上的附加条件，虽根据这些附加条件，去寻找每个问题合理的在$*M$的近似解。从数学上看，用解析开拓法所得到的发散积分的值只是无限个可能中的一个，只相当于一种特别的$*M$近似延拓。

如果我们把通常的空间称为宏观世界，把小宇宙称为微观世界，把巨大的宇宙称为宇观世界，那么对于物理问题或天文问题而言，如果$*M$近似延拓所得的函数能进一步反映微观世界或宇观世界的物理或天文特性，那会多么使人振奋。从数学上讲，我们在$*M$近似延拓的基础上求解奇异积分，只是从逻辑上说明了进一步深入认识和描述物理世界和天文世界的一种可能性。

§40 关于奇异积分的简单例题

为了加深对上节中定义的理解，本节再举几个例题，说明如何处理具体的奇异积分。

【例 1】 研究积分

$$(40,\ 1)\qquad \int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx=?\ ,$$

这里被积函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，在$x=0$函数没有定义，它是被积函数的奇点。

今在$*M$定义函数

$$(40,\ 2)\qquad g_1(x)=\frac{1}{|x|}\Phi(Bx)$$

$$=\frac{1}{|x|}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}*\int_0^{Bx}e^{-t^2}dt.$$

在上式中把$x=0$看作$g_1(x)$的可去奇点，B是正无限大。由(33,

8)可知 $g_1(x)$ 是$\frac{1}{x}$在$[-1, 1]$的黎曼可积的$*M$近似延拓。由于$g_1(x)$是奇函数，所以成立

$$(40, 3)\qquad *\int_{-1}^{1} g_1(x)dx = 0.$$

因此，积分（40，1)的一个标准解答是0。

进一步，在$*M$令

$$(40, 4)\qquad g_2(x) = \frac{1}{x+ib},$$

其中b是正无限小，i是虚数单位，则$g_2(x)$也是$\frac{1}{x}$在$[-1, 1]$的黎曼可积的$*M$近似延拓。不难看出

$$\begin{aligned}(40, 5)\qquad & \mathrm{st}\left(*\int_{-1}^{1} g_2(x)dx \right)\\ &= \mathrm{st}\left(*\int_{-1}^{1} \frac{1}{x+ib}dx \right)\\ &= \mathrm{st}\left(*\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+b^2}\, dx - i *\int_{-1}^{1} \frac{b}{x^2+b^2}\, dx \right)\\ &= -i\pi\mathrm{st}\left(*\int_{-1}^{1} \delta_3(x)dx \right)\\ &= -i\pi.\end{aligned}$$

这就是说，虚数$-i\pi$可以是积分（40，1)的一个标准解。

如果在$*M$令

$$\begin{aligned}(40, 6)\qquad g_3(x) &= g_1(x) + C_0\delta_1(x)\\ &\quad + C_1\delta_1^{*\prime}(x) + \cdots + C_n\delta^{*(n)}(x),\end{aligned}$$

其中$\delta_1(x)$的表示见（33，11)，$n\in N$，C_0，$C_1,\cdots,C_n\in *R$（或非标准复数域$*\mathbb{C}$）。这样，$g_3(x)$是$\frac{1}{x}$在$[-1, 1]$的黎曼可积的$*M$近似延拓。不难看出

(40, 7)
$$*\int_{-1}^{1} g_3(x)dx$$
$$= C_0*\int_{-1}^{1}\delta_1(x)dx + C_1*\int_{-1}^{1}\delta_1^{*\prime}(x)dx$$
$$+\cdots+ *\int_{-1}^{1} C_n\delta^{*(n)}(x)dx.$$

于是，任何非标准实数（或复数）都可以是积分（40,1)在$*M$的近似解.

【例 2】 设标准函数φ在$[-1, 1]$ $n(n\in N)$次连续可微，研究积分

(40, 8)
$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(x)}{x}dx = ?\ .$$

第一种解法.用（40, 2)取$g_1(x)$为$\frac{1}{x}$在$[-1, 1]$的黎曼可积的$*M$近似延拓，则（40, 8)在$*M$的一个近似解答为

(40, 9)
$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}*\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(x)}{|x|}\int_0^{Bx}e^{-t^2}dtdx$$
（令$Bx=\xi$, $x=b\xi$）
$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}*\int_{-B}^{B}\frac{\varphi(b\xi)}{|\xi|}\int_0^{\xi}e^{-t^2}dtd\xi.$$

显然，这个解不一定是有限的。因此，相应的（40, 8)解此时不一定有标准解。

第二种解法。取（40, 4)中的$g_2(x)$为$\frac{1}{x}$在$[-1, 1]$的黎曼可积的$*M$近似延拓，则（40, 8)有一个标准解如下

(40,10)
$$\mathrm{st}\left(*\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(x)}{x+ib}dx\right)$$
$$=\mathrm{st}\left(*\int_{-1}^{1}\frac{x\varphi(x)}{x^2+b^2}dx - i*\int_{-1}^{1}\frac{b\varphi(x)}{x^2+b^2}dx\right)$$

$$= \text{st}\left(* \int_{-1}^{1} \frac{x[\varphi(x) - \varphi(0)]}{x^2 + b^2} dx \right) - i\pi\varphi(0)$$

$$= -i\pi\varphi(0)$$

$$+ \text{st}\left(* \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{x^2 + b^2} * \int_0^1 \varphi'(\xi x) d\xi dx \right)$$

$$= -i\pi\varphi(0) + \int_{-1}^{1} \int_0^1 \varphi'(\xi x) d\xi dx.$$

因为当b是正无限小时，成立

$$\text{st}\left(\frac{x^2}{x^2 + b^2} \right) = 1,$$

所以得到（40,10)最后的标准部分。

第三种解法。取（40，6)中的$g_3(x)$为$\frac{1}{x}$在$[-1, 1]$的黎曼可积的$*M$近似延拓，则

(40,11)
$$* \int_{-1}^{1} g_3(x)\varphi(x)dx = * \int_{-1}^{1} g_1(x)\varphi(x)dx$$
$$+ C_0 * \int_{-1}^{1} \varphi(x)\delta(x)dx + C_1 * \int_{-1}^{1} \varphi(x)\delta^{*1}(x)dx$$
$$+ \cdots + (-1)^n C_n * \int_{-1}^{1} \varphi(x)\delta^{*(n)}(x)dx$$

可以取到$*R$（或$*\mathcal{C}$）中的任意值。特别当$C_0, C_1, \cdots, C_n \in R$（或$\mathcal{C}$），我们可以推得

(40,12)
$$* \int_{-1}^{1} g_3(x)\varphi(x)dx$$
$$= * \int_{-1}^{1} g_1(x)\varphi(x)dx + C_0\varphi(0)$$
$$- C_1\varphi'(0) + \cdots + (-1)^n C_n\varphi^{(n)}(0)$$
$$+ \text{无限小}.$$

【例 3】 研究积分

(40,13) $\int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)dx = ?$.

本例中取$\varphi(x)=e^{-x}$。当$\lambda>-1$时成立

(40,14) $\Gamma(\lambda+1)=\int_0^\infty x^\lambda e^{-x}dx$.

当$\lambda<-1$，利用解析开拓公式

(40,15) $\Gamma(\lambda+1)=\lambda\Gamma(\lambda)$.

若$-n-1<\lambda<-n$，注意到[40]中的公式，我们有

(40,16) $\Gamma(\lambda)=\frac{\Gamma(\lambda+n+1)}{\lambda(\lambda+1)\cdots\cdots(\lambda+n)}$.

这样就定义了解析函数$\Gamma(\lambda)$。虽然当$\lambda<-1$时积分（40，13）发散，但利用解析开拓的方法可以得此奇异积分的一种解答。

盖尔劳特[3]利用了十个十分复杂的手法来完成这个解析开拓的过程。他的表示如下

(40,17)
$$\int_0^\infty x^\lambda\varphi(x)dx=\int_0^1 x^\lambda[\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\cdots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{n-1}(0)]dx+\int_0^\infty x^\lambda\varphi(x)dx+\sum_{k=1}^n\frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!(\lambda+k)}.$$

因为当$\lambda>-1$时，(40，17)显然为真，因此当$-n-1<\lambda<-n$时，就利用（40，17）进行开拓。由于解析开拓的唯一性，因此（40,17)仍是$\Gamma(\lambda+1)$的另一表示。

现在仿照（39,20)在$*M$引进下面的辅助函数

(40,18) $g(x,\lambda)=\begin{cases}x^\lambda, & \sigma\leqslant x<*\infty,\\ \sigma^\lambda+K(\lambda)(x-\sigma), & 0\leqslant x<\sigma,\end{cases}$

这里σ是正无限小，$K\in *ft(*R,*R)$，$K(\lambda)$与x无关。于是，$g(x,\lambda)e^{-x}$在$[0,*\infty)$是$x^\lambda e^{-x}$的黎曼可积的$*M$近似延拓。现在计算

$$(40,19)\quad I(\lambda)={}^*\int_0^{*\infty} g(x,\lambda)e^{-x}dx$$

$$={}^*\int_0^{\sigma}[\sigma^{\lambda}+K(\lambda)(x-\sigma)]e^{-x}dx$$

$$+{}^*\int_{\sigma}^{*\infty}x^{\lambda}e^{-x}dx$$

$$=(1-e^{-\sigma})\sigma^{\lambda}+K(\lambda)[1-\sigma-e^{-\sigma}]$$

$$+{}^*\int_{\sigma}^{*\infty}x^{\lambda}e^{-x}dx。$$

请注意，在上式中$K(\lambda)$的系数是

$$(40,20)\quad 1-\sigma-e^{-\sigma}$$

$$=1-\sigma-1+\sigma-\frac{\sigma^2}{2!}+\cdots$$

$$=-\frac{\sigma^2}{2!}+\cdots<0.$$

这样，如果取$K(\lambda)$使得

$$(40,21)\quad (1-e^{-\sigma})\sigma^{\lambda}+K(\lambda)(1-\sigma-e^{-\sigma})=0,$$

则当$\lambda>-1$时成立

$$(40,22)\quad I(\lambda)={}^*\int_0^{*\infty}x^{\lambda}e^{-x}dx=\text{无限大}。$$

又如果取$K(\lambda)$使得(40,19)的最后的表示式等于$\Gamma(\lambda+1)$，则成立$I(\lambda)=\Gamma(\lambda+1)$.

其实，当$K(\lambda)$变化时，$I(\lambda)$可以成为$^*M$中任意指定的函数.

【例 4】 在(40,13)中取$\varphi(x)=e^{-px}$,这里$p\in R$且$p>o$.现在研究积分

$$(40,23)\quad \int_0^{\infty}x^{\lambda}e^{-px}dx=?\ .$$

当$\lambda>-1$，由[14]，[11]和[52]可以查到以下公式

$$(40,24)\qquad \frac{\Gamma(\lambda+1)}{p^{\lambda+1}}=\int_0^{\infty} x^\lambda e^{-px}dx.$$

当$\lambda<-1$，[14]，[11]和[52]中没有讨论。如果我们对λ进行解析开拓，不管是直接由(40,24)进行解析开拓或者用很复杂的公式(40,17)进行开拓，其结果都相同，都构成(40,23)的一种解答。

现在仿照(40,18)在${}^*M$引进辅助函数

$$(40,25)\qquad g(x,\lambda)=\begin{cases} x^\lambda, & \sigma\leqslant x<{}^*\infty, \\ K(x,\lambda), & o\leqslant x<\sigma. \end{cases}$$

我们在${}^*M$选择$K(x,\lambda)$使得$g(x,\lambda)$是$x^\lambda e^{-px}$在$x\in[o,{}^*\infty)$的黎曼可积的${}^*M$近似延拓。现在计算

$$\begin{aligned}(40,26)\qquad I(p,x)&={}^*\int_0^{{}^*\infty} g(x,\lambda)e^{-px}dx \\ &={}^*\int_0^{\sigma} K(x,\lambda)e^{-px}dx \\ &\quad+{}^*\int_{\sigma}^{{}^*\infty} x^\lambda e^{-px}dx,\end{aligned}$$

这里$K(x,\lambda)$可以在很广泛的函数类中选取。例如可以选取$K(x,\lambda)$是x的多项式，幂级数和三角级数等等，这时(40,26)右端的第一项

$$(40,27)\qquad {}^*\int_0^{\sigma} K(x,\lambda)e^{-px}dx$$

是${}^*M$中有限的Laplace变换，可以在${}^*M$中很广泛的函数类中变化，其任意性很大。这就是说，奇异函数的Laplace变换有很大的不确定性。

在[53]中对奇异积分的处理采取了有限部分的概念。为了比较，我们研究以下例题。

【例5】 在M中对$a>o$研究积分

$$(40,28)\qquad \int_0^a \frac{dx}{x}=?\ .$$

取$\varepsilon>0$，如果把上式看作

$$(40,29)\qquad \int_0^a \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^a \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}[\ln a - \ln\varepsilon] = \ln a.$$

最后这一步是取极限号中的有限部分$\ln a$，而去掉了无限大部分$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln\varepsilon$。

如果我们在$*M$中取以下辅助函数：

$$(40,30)\qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \sigma\leqslant x\leqslant a, \\ \dfrac{1}{\sigma}+K(x-\sigma), & 0\leqslant x<\sigma, \end{cases}$$

这里σ是正无限小。按我们的定义，$g(x)$是$\dfrac{1}{x}$在$[0,a]$的黎曼可积的$*M$近似延拓．今计算

$$(40,31)\qquad *\int_0^a g(x)dx = *\int_0^\sigma\left[\frac{1}{\sigma}+K(x-\sigma)\right]dx + *\int_\sigma^a \frac{1}{x}dx = 1-\frac{K\sigma^2}{2}+\ln a-\ln\sigma.$$

当K在$*R$中任意变化时，此积分可以取到$*R$中的任意一个数。特别如果取

$$K=\frac{2(1-\ln\sigma)}{\sigma^2},$$

则得到积分(40,29)右端的有限部分。

【例 6】 一维Hilbert变换。在〔8〕中研究如下的变换

$$(40,32)\qquad H_{\varepsilon}f=\int_{|x-t|>\varepsilon}\frac{f(t)}{x-t}dt,$$

这就是所谓的Hilbert变换，其中$f\in L_p(R)$，$1<p<\infty$。为了保险，我们增设$f\in L_1(R)$，即f在R不仅是p幂L可积，而且是L可积的按照〔8〕的结果，知存在$\tilde{f}\in L_p(R)$使得

$$(40'33)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\left\|H_{\varepsilon}f-\tilde{f}\right\|_{Lp}=0,$$

而且成立$H_{\varepsilon}f\in L_p(R)$。

现在在$^*M$引入以下函数

$$(40,34)\qquad H(x,t,\sigma)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-t}, & |x-t|>\sigma,\\ 0, & |x-t|\leqslant\sigma,\end{cases}$$

这里σ是正无限小。于是$H(x,t,\sigma)f(t)$是$\dfrac{f(t)}{x-t}$在$t\in R$的L可积的$^*M$近似延拓.由(40,33)可推得

$$(40,35)\qquad \mathrm{st}\left\{{}^*\left\|{}^*\int H(x,t,\sigma)f(t)dt-{}^*\tilde{f}(x)\right\|_{Lp}\right\}=0.$$

由(40,33)还可得

$$(40,36)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}H_{\varepsilon}f=\tilde{f}(x)$$

几乎处处成立。因此有

$$(40,37)\qquad \mathrm{st}\left\{{}^*\int H(x,t,\sigma)f(t)dt\right\}=\tilde{f}(x)$$

对$x\in R$几乎处处成立。

以上是〔8〕中古典结果的表述.由此可见，前人在处理奇异积分方面费尽了心机，所得局部结果也是十分深刻的。

现在在$^*M$引入以下函数

$$(40,38)\qquad g(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-t}, & t<x-\sigma,\\ K(x), & x-\sigma\leqslant t\leqslant x+\sigma,\\ \dfrac{1}{x-t}, & x+\sigma<t.\end{cases}$$

这里σ仍为正无限小，$K(x)$为x在该区间上的任意函数。因此，$g(x,t)f(t)$是$\dfrac{f(t)}{x-t}$在$t\in{}^*R$的L可积的$^*M$近似延拓。现 在 计算

$$(40,39)\qquad {}^*\int_{-{}^*\infty}^{+{}^*\infty} g(x,t)f(t)dt$$

$$={}^*\int_{-{}^*\infty}^{x-\sigma}\frac{f(t)}{x-t}dt+{}^*\int_{x+\sigma}^{+{}^*\infty}\frac{f(t)}{x-t}dt$$

$$+{}^*\int_{x-\sigma}^{x+\sigma}K(x)dt$$

$$={}^*\int_{|t-x|>\sigma}\frac{f(t)}{x-t}dt+2\sigma K(x).$$

由于σ是正无限小，因此当$K(x)$为不同的函数时，(40,39) 左端的积分可以取到$^*M$中任意指定的函数。

§41 单位阶梯函数的傅里叶变换

所谓单位阶梯函数，就是下面的函数

$$(41,1)\qquad \eta(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<\infty\\ 0, & -\infty<t<0.\end{cases}$$

这是最简单的阶梯函数，也是数学和物理两门学科中一个常见的重要函数。

在标准分析M中求$\eta(t)$的傅里叶变换，即计算积分

$$(41,2)\qquad F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\eta(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$=\int_0^{\infty} e^{-i\omega t}dt.$$

但在标准分析的范围内，这个积分是发散的，因而$F(\omega)$没有确切的含义。于是我们只能在扩大的意义下寻求解答。

我们在$*M$中寻求$\eta(t)$的非标准的傅里叶变换，即计算积分

$$(41,3)\qquad *\int_{-*\infty}^{+*\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt,$$

在这里要求$g(t)$是$*M$的函数，当t为有限数时成立

$$(41,4)\qquad \mathrm{st}(g(t)-*\eta(t))=0,$$

这里$*\eta$是η通过$*$-映射在$*\Gamma$中所对应的函数，它的具体表示为

$$(41,5)\qquad *\eta(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<+*\infty,\\ 0, & -*\infty<t<0,\end{cases}$$

还需使得$g(t)e^{-i\omega t}$是$\eta(t)e^{-i\omega t}$在$(-*\infty, +*\infty)$的黎曼可积的$*M$近似延拓，即要求(41,3)在$*M$是有意义的。

【例 1】 在$*M$中定义以下的函数

$$(41,6)\qquad g_1(t)=\begin{cases}0, & -*\infty<t<0,\\ 1, & 0\leqslant t\leqslant B,\\ 0, & B<t<*\infty,\end{cases}$$

这里B为正无限大。这时，可将$g_1(t)$代替$g(t)$使得(41,4)成立，而且积分(41,3)有意义。

现在研究下面的积分

$$(41,7)\qquad F_1(\omega)=*\int_{-*\infty}^{+*\infty} g_1(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$=*\int_0^B e^{-i\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{i\omega}(1-e^{-i\omega t})$$

$$= r_1(\omega) + iI_1(\omega),$$

这里

$$(41,8) \qquad r_1(\omega) = \frac{\sin B\omega}{\omega} = \pi\varDelta_1(\omega),$$

$$(41,9) \qquad I_1(\omega) = \frac{\cos B\omega - 1}{\omega}.$$

在(41,8)中，$\varDelta_1(x)$如(33,34)所表示。

在本书的意义下，$F_1(\omega)$是$\eta(t)$的傅里叶变换的一个（非标准的）解答。

我们还可以构造很多其它的非标准解答。为了说明这个，再举一例如下。

【例 2】 在$^*M$中定义如下的函数

$$(41,10) \qquad g_2(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t}{B}}, & 0 \leqslant t < {}^*\infty, \\ 0, & -{}^*\infty < t < 0, \end{cases}$$

则$g_2(t)$代替$g(t)$可使得(41,4)成立，并且积分(41,3)有意义。

现在研究积分

$$(41,11) \qquad F_2(\omega) = {}^*\int_{-{}^*\infty}^{+{}^*\infty} g_2(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$= {}^*\int_0^{{}^*\infty} e^{-\left(\frac{1}{B} + i\omega\right)t} dt$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{B} + i\omega}$$

$$= r_2(\omega) + iI_2(\omega),$$

这里

$$(41,12) \qquad r_2(\omega) = \frac{\frac{1}{B}}{\left(\frac{1}{B}\right)^2 + \omega^2} = \pi\delta_3(\omega),$$

(41,13) $$I_2(\omega)=\frac{\omega}{\left(\frac{1}{B}\right)^2+\omega^2}$$

在(41,12)中$\delta_3(x)$的表示见(33,59)。

在我们的意义下，$F_2(\omega)$是$\eta(t)$的傅里叶变换的另一个非标准的解答。

其他的例子可参考〔5〕。

以下着重讨论一下$F_1(\omega)$的性质。设$f(\omega)$是一个标准函数，我们研究以下积分

(41,14) $$\tilde{I}(s)=\frac{1}{\pi}*\int_{-s}^{s}F_1(\omega)f(\omega)d\omega,$$

这里$s\in R$且$s>0$。这里只讨论两种情况，第一种是

(41,15) $$f(\omega)=a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos k\omega+b_k\sin k\omega).$$

这时，注意到奇函数和偶函数的性质，我们可以把(41,14)中的$\tilde{I}(s)$写为

(41,16) $$\tilde{I}(s)=\tilde{I}_1(s)+\tilde{I}_2(s),$$

这里

(41,17) $$\tilde{I}_1(s)=*\int_{-s}^{s}\varDelta_1(\omega)\left[a_0+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos k\omega\right]d\omega,$$

(41,18) $$\tilde{I}_2(s)=\frac{i}{\pi}*\int_{-s}^{s}\frac{\cos B\omega-1}{\omega}\left[\sum_{k=1}^{n}b_k\sin k\omega\right]d\omega$$

$$=\frac{i}{\pi}*\int_{-s}^{s}(\cos B\omega-1)\left[\sum_{k=1}^{n}b_k\frac{\sin k\omega}{\omega}\right]d\omega.$$

由以上两式不难看出

(41,19) $$\mathrm{st}(\tilde{I}_1(s))=a_0+\sum_{k=1}^{n}a_k,$$

(41,20) $$\lim_{s\to\infty}\mathrm{st}(\tilde{I}_1(s))=a_0+\sum_{k=1}^{n}a_k,$$

$$(41,21)\qquad st(\tilde{J}_2(s)) = -\frac{i}{\pi} * \int_{-s}^{s} \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\sin k\omega}{\omega} d\omega,$$

$$(41,22)\qquad \lim_{s\to\infty} st(\tilde{J}_2(s)) = -i \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

由以上四式不难推得

$$(41,23)\qquad \lim_{s\to\infty} st(\tilde{J}(s)) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - ib_k).$$

这个式子的右端表示了$F_1(\omega)$对形如(41,15)的$f(\omega)$的 筛取结果。

现在讨论第二种情况。在M中令$a(t)$和$b(t)$在 $[0,\infty)$ 绝 对可积，并定义

$$(41,24)\qquad f(\omega) = \int_0^{\infty} a(t)\cos\omega t\, dt + \int_0^{\infty} b(t)\sin\omega t dt.$$

再一次利用偶函数和奇函数的性质推得(41,14)中的$\tilde{J}(s)$ 可写为

$$(41,25)\qquad \tilde{J}(s) = I_3(s) + I_4(s),$$

这里

$$(41,26)\qquad I_3(s) = *\int_{-s}^{s} \Delta_1(\omega) * \int_0^{*\infty} a(t)\cos\omega t dt d\omega$$

$$(41,27)\qquad I_4(s) = \frac{i}{\pi} * \int_{-s}^{s} \frac{\cos B\omega - 1}{\omega} * \int_0^{*\infty} b(t)\sin\omega t dt d\omega.$$

首先计算$I_3(s)$。交换积分次序得

$$(41,28)\qquad I_3(s) = *\int_0^{*\infty} a(t)dt * \int_{-s}^{s} \Delta_1(\omega)\cos\omega t d\omega$$

$$(41,29)\qquad st(I_3(s)) = \int_0^{\infty} a(t)dt.$$

其次计算$I_4(s)$.交换积分次序得

(41,30) $$I_4(s) = \frac{i}{\pi} * \int_0^{+\infty} b(t)dt \times * \int_{-s}^{s} \frac{\cos B\omega - 1}{\omega} \sin\omega t d\omega.$$

于是不难看出

(41,31) $$\begin{aligned} \mathrm{st}(I_4(s)) &= -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} b(t)dt \int_{-s}^{s} \frac{\sin\omega t}{\omega} d\omega \\ &= -\frac{i}{\pi} \left\{ \int_0^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right\} b(t)\,dt \int_{-s}^{s} \frac{\sin\omega t}{\omega} d\omega \\ &= I_5(s) + I_6(s). \end{aligned}$$

上式中ε为任意正实数，$I_5(s)$的表示为

(41,32) $$I_5(s) = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\varepsilon} b(t)dt \int_{-st}^{st} \frac{\sin\xi}{\xi} d\xi.$$

由积分指数函数的有界性（请参看〔12〕,42—44页）推得，存在一个常数K使得

(41,33) $$|I_5(s)| \leqslant K \int_0^{\varepsilon} |b(t)| dt.$$

请注意，这里的常数K与ε无关。

又(41,31)中的$I_6(s)$的表示为

(41,34) $$I_6(s) = -\frac{i}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\infty} b(t)dt \int_{-st}^{st} \frac{\sin\xi}{\xi} d\xi.$$

不难看出

(41,35) $$\lim_{s\to\infty} I_6(s) = -i \int_{\varepsilon}^{\infty} b(t)dt.$$

由于(41,33)右端积分$\int_0^{\varepsilon} |b(t)| dt$的值随$\varepsilon$而趋于零。因此成立以下公式

(41,36) $$\lim_{s\to\infty} \mathrm{st}(I_4(s)) = -i \int_0^{\infty} b(t)dt.$$

最后得到

(41,37) $\qquad \lim_{s\to\infty} st(\tilde{f}(s)) = \int_0^{\infty}[a(t)-ib(t)]dt.$

这个公式表示了$F_1(\omega)$对于由积分公式(41,24)所表示的标准函数$f(\omega)$的筛取结果。

作为本节的结束，我们再讨论一个例题。

【例 3】 在$^*M$中定义函数

(41,38) $$g_3(t)=\begin{cases}0, & -^*\infty<t<0\\ 1, & 0\leqslant t\leqslant B\\ K(t), & B<t\leqslant 2B\\ 0, & 2B<t<^*\infty.\end{cases}$$

这里$K(t)$是$^*M$中任意的可积函数。这时将$g_3(x)$代替$g(t)$可使得(41,4)成立，并使得积分(41,3)有意义。现在研究积分

(41,39) $$F_3(\omega)={}^*\int_{-^*\infty}^{+^*\infty}g_3(t)e^{-i\omega t}dt = F_1(\omega)+F_4(\omega),$$

这里$F_1(\omega)$如(41,7)所表示，$F_4(\omega)$的表示如下

(41,40) $$F_4(\omega)=\int_B^{2B}K(t)e^{-i\omega t}dt$$

由于在$^*M$中$K(t)$的任意性，所以$F_4(\omega)$也有很大的任意性。这是$^*M$中的有限傅里叶变换，本书不打算对此再进行深入的研究了。

§42 奇异函数的傅里叶变换举例

设$f(t)$是M中的奇异函数，那么它的傅里叶变换

(42,1) $$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\omega t}dt=?\ .$$

为了简单，在本节中我们只研究当$f(t)=\frac{1}{t}$的特殊情况，这时$f(t)$在$t=0$没有定义。

现在在$*M$取函数$g(t)$，对每个$x\in R$且$x\neq o$，如果$t\in \text{mon}(*x)$，则$g(t)$满足

(42,2) $$\text{st}\{g(t)-*f(t)\}=0,$$

这里$*f$是f通过$*$——映射在$*\Gamma$中的象。进一步，还需假设$g(t)e^{i\omega t}$是$f(t)e^{i\omega t}$在$(-*\infty, +*\infty)$的黎曼可积的$*M$近似延拓，即积分

(42,3) $$F(\omega)=\int_{-*\infty}^{+*\infty} g(t)e^{i\omega t}dt$$

是收敛的。

第一种情况，我们在$*M$取函数

(42,4) $$g_1(t)=\begin{cases} f(t), & |t|\geqslant\sigma, \\ 0, & |t|<\sigma, \end{cases}$$

这里σ是正无限小，这时以$g_1(t)$代替$g(t)$可以使得(42,2)成立且积分(42,3)有意义。我们认为，以$g_1(t)$代替(42,3)中的$g(t)$所得到的就是$f(t)$的傅里叶变换的一个非标准解答，它就是

(42,5) $$\begin{aligned} F_1(\omega) &= *\int_{-*\infty}^{+*\infty} g_1(t)e^{i\omega t}dt \\ &= *\int_{-*\infty}^{-\sigma}\frac{e^{i\omega t}}{t}dt + *\int_{\sigma}^{+*\infty}\frac{e^{i\omega t}}{t}dt \\ &= 2i\int_{\sigma}^{+*\infty}\frac{\sin\omega t}{t}dt. \end{aligned}$$

进一步不难看出

(42,6) $$\text{st}(F_1(\omega))=\pi i\,\text{sgn}\,\omega.$$

这时所得到的是$f(t)$的傅里叶变换的一个标准的解答。

第二种情况，我们在$*M$取

(42,7) $$g_2(t)=\begin{cases} f(t), & |t|\geqslant\sigma, \\ *\sum_{k=0}^{n} C_k\delta_1^{*(k)}(t), & |t|<\sigma, \end{cases}$$

这里$\delta_1(x)$如（33,11）所表示，$\sigma=\sqrt{b}$，b是正无限小，C_k是标准复数，$k=0, 1, \cdots, n, n\in N$。

以$g_2(t)$代替$g(t)$可以使得（42,2）成立并使得（42,3）有意义。我们自然认为以$g_2(t)$代替$g(t)$后所得到的积分（42,3）即为$f(t)$的傅里叶变换的另一个非标准解，它就是

$$(42,8)\qquad F_2(\omega)={}^*\int_{-*\infty}^{+*\infty} g_2(t)e^{i\omega t}dt = F_1(\omega)+G_2(\omega),$$

这里$F_1(\omega)$如（42,5）所表示，而$G_2(\omega)$的表示为

$$(42,9)\qquad G_2(\omega)={}^*\sum_{k=0}^{n} C_k {}^*\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} \delta_1^{*(k)}(t)e^{i\omega t}dt.$$

对上式分部积分可以得到以下结果

$$(42,10)\qquad \mathrm{st}(G_2(\omega)) = \sum_{k=0}^{n} C_k \mathrm{st}\left({}^*\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} \delta_1^{*(k)}(t)e^{i\omega t}dt\right) = \sum_{k=0}^{n}(-i)^k C_k\omega^k.$$

因此成立

$$(42,11)\qquad \mathrm{st}(F_2(\omega))=\pi i\,\mathrm{sgn}\,\omega+\sum_{k=0}^{n}(-i)^n C_k\omega^k.$$

这是$f(t)$的傅里叶变换的另一个标准解。比较（42,6）和(42,11)，这两个标准解之间的差别是一个任意的n次多项式。

第三种情况，我们在$^*M$定义函数

$$(43,12)\qquad g_3(t)=\begin{cases} f(t), & |t|\geqslant\sigma,\\ K(t), & |t|<\sigma,\end{cases}$$

这里$K(t)$是$^*M$中的任意函数，它使得$K(t)e^{i\omega t}$在$|t|<\sigma$黎

曼可积，这时，以$g_3(t)$代替$g(t)$可使得（42,2）成立并使得（42,3）有意义。我们自然认为以$g_3(t)$代替$g(t)$后所得到的积分（42,3)即为$f(t)$的傅里叶变换的另一非标准解，它就是

$$
\begin{aligned}
(42,13)\qquad F_3(\omega) &= {}^*\int_{-*\sigma}^{+*\sigma} g_3(t)e^{i\omega t}dt \\
&= F_1(\omega)+G_3(\omega),
\end{aligned}
$$

这里$F_1(\omega)$如（42,5）所表示，而$G_3(\omega)$的表示为

$$
(42,14)\qquad G_3(\omega) = {}^*\int_{-\sigma}^{\sigma} K(t)e^{i\omega t}dt.
$$

当$K(t)$在$^*M$中任意变化时，$G_3(\omega)$是它的在$^*M$有限的傅里叶变换，当然可以取到很广泛的一类函数。本书就不再对这个问题进行深入的讨论了。

§43 线性奇异常微分方程

首先，我们在M中研究最简单的奇异常微分方程的初值问题

$$
(42,1)\qquad \begin{cases} y'(x)=f(x), \\ y(a)=A, \end{cases}
$$

这里$f(x)$在$a\leqslant x<0$和$0<x\leqslant\beta$有定义且连续，但当$x=0$，$f(x)$没有意义，a和A属于R是常数。

现在在$^*M$寻找一个函数$g(t)\in{}^*C([{}^*a,{}^*\beta])$，当$x\in[a,0)\cup(0,\beta]$和$t\in\text{mon}({}^*x)$时成立

$$
(43,2)\qquad \text{st}\{g(t)-{}^*f(t)\}=0,
$$

这里$^*f$是f通过$*$——映射在$^*\Gamma$中的象。然后建立(43,1)在$^*M$的近似方程

$$
(43,3)\qquad \begin{cases} y^{*\prime}(t)=g(t) \\ y(a)={}^*A. \end{cases}
$$

在$^*M$中（43,3）的解可以表示为

(43,4) $y(x) = {}^*A + {}^*\int_a^x g(t)dt$.

我们称(43,4)的$y(x)$是初值问题（43,1）的一个非标准解。注意到：

(43,5) $g(t) - g(t+\alpha)$
$= g(t) - {}^*f(t)$
$+ {}^*f(t) - {}^*f(t+\alpha) + {}^*f(t+\alpha) - g(t+\alpha)$

和（43,2）和f的连续性，当$t \in \text{mon}({}^*x)$，$x \in [a,0) \cup (0,\beta]$和$\alpha$是无限小时成立

(43,6) $\text{st}(g(t) - g(t+\alpha)) = 0$.

由此推得，若(43,4)中的$y(x)$为有限值，当实数$x \in [a,0) \cup (0,\beta]$时令

(43,7) $\tilde{y}(x) = \text{st}(y(x))$,

则由定理（24,14）得

(43,8) $\tilde{y}'(x) = \text{st}(g(x)) = f(x)$.

于是$\tilde{y}(x)$是（43,1）的一个标准解。

以下举两个例题。

【例 1】 在M中定义函数

(43,9) $f_1(x) = \begin{cases} 0, & a \leqslant x < 0 \\ 0, & 0 < x \leqslant \beta, \end{cases}$

但在$x=0$，$f_1(x)$无定义。我们将$f_1(x)$代替(43,1)中的$f(x)$，然后求解。

第一种解法是用解析开拓的办法，把$f_1(t)$开拓为

(43,10) $g_1(t) = 0$，$a \leqslant t \leqslant \beta$.

这时$g_1(t) \in {}^*C([{}^*a, {}^*\beta])$，而且以$g_1(t)$和$f_1(t)$代替$g(t)$和$f(t)$能使（43,2)成立。这样，将$g_1(t)$代替（43,4）中的$g(t)$得到

(43,11) $y_1(x) = {}^*A + {}^*\int_a^x g_1(t)dt$

$= {}^*A.$

于是$\tilde{y}_1(x)=\mathrm{st}(y_1(x))=A$，它是（43,1）的一个标准解。

第二种解法是令

$$(43,12)\qquad g_2(t)={}^*\sum_{k=0}^{n}C_k\delta_1^{*(k)}(t),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

这里$\delta_1(t)$如(33,11)所表示，C_k是标准复数，$n\in N$。

这时$g_2(t)\in {}^*C([{}^*\alpha,{}^*\beta])$，并且以$g_2(t)$和$f_1(t)$代替$g(t)$和$f(t)$能使（43,2）成立。将$g_2(t)$代替(43,4)中的$g(t)$得

$$(43,13)\qquad y_2(x)={}^*A+{}^*\sum_{k=0}^{n}C_k{}^*\int_\alpha^x\delta_1^{*(k)}(t)dt$$

$$={}^*A+\frac{C_0}{\sqrt{\pi}}{}^*\int_{B\alpha}^{Bx}e^{-t^2}dt$$

$$+{}^*\sum_{k=1}^{n}C_k\left[\delta_1^{*(k-1)}(x)-\delta_1^{*(k-1)}(\alpha)\right].$$

注意，上式中B是正无限大。令$\tilde{y}_2(x)=\mathrm{st}(y_2(x))$，于是成立

$$(43,14)\qquad \tilde{y}_2(x)=\begin{cases}A, & \alpha\leqslant x<0,\\ A+C_0, & 0<x\leqslant\beta.\end{cases}$$

这就是说，$\tilde{y}_2(x)$是一个标准解，它是一个限梯函数。

请注意，仅管（43,13）中的$y_2(x)$当$C_1,\cdots,C_n$变化时是${}^*M$中的不同的函数，但其标准部分相同，仅由C_0决定。但是，若把$y_2(x)$看作M中的函数的泛函，则$C_1,\cdots,C_n$的影响就不可忽视了。设$\varphi(x)$是M中定义于$[\alpha,\beta]$的足够光滑的函数，则成立

$$(43,15)\qquad \mathrm{st}\left({}^*\int_\alpha^\beta\varphi(x)y_2(x)dx\right)$$

$$=A\int_\alpha^\beta\varphi(x)\,dx+C_0\int_0^\beta\varphi(x)dx$$

$$+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_k\varphi^{(k-1)}(0).$$

这是不能不引起充分注意的。

第三种情况是令

$$(43,16)\qquad g_3(t)=\begin{cases}0, & a\leqslant x<-\sigma,\\ 2K(x+\sigma), & -\sigma\leqslant x\leqslant 0,\\ -2K(x-\sigma), & 0<x\leqslant\sigma,\\ 0, & \sigma<x\leqslant\beta,\end{cases}$$

这里σ是正无限小，K是非标准复数。这时，$g_3(t)\in {}^*C([{}^*a, {}^*\beta])$，并且以$g_3(t)$和$f_1(t)$代替$g(t)$和$f(t)$能使（43,2）成立。将$g_3(t)$代替（43,4）中的$g(t)$得

$$(43,17)\qquad y_3(x)={}^*A+{}^*\int_a^x g_3(t)dt.$$

当$a\leqslant x\leqslant-\sigma$时，成立

$$(43,18)\qquad y_3(x)={}^*A,$$

当$\sigma\leqslant x\leqslant\beta$时，成立

$$(43,19)\qquad y_3(x)={}^*A-4K{}^*\int_0^\sigma(t-\sigma)dt$$
$$={}^*A+2K\sigma^2;$$

当K在${}^*R$(或${}^*\mathscr{C}$)中变化时，$y_3(x)$可以取到${}^*R$(或${}^*\mathscr{C}$)中的任意常数。特别当$K\sigma^2$是无限大时，$y_3(x)$在$\sigma\leqslant x\leqslant\beta$没有标准部分。此时导不出（43,1）的标准解，$y_3(x)$仅仅是（43,1）的非标准解。

【例2】 在M中定义函数

$$(43,20)\qquad f_2(x)=\frac{1}{x},\quad a\leqslant x<0\cup 0<x\leqslant\beta,$$

当$x=0$，$f_2(x)$无定义。我们将$f_2(x)$代替（43,1）中的$f(x)$，然后求解。

第一个办法是用解析开拓的方法。为此，定义

(43,21) $$g_4(t)=\frac{1}{t+i\sigma},$$

这里σ为正无限小。这时$g_4(t)\in {}^*C([{}^*a,\ {}^*\beta])$。以$g_4(t)$和$f_2(x)$代替$g(t)$和$f(t)$能使(43,2)成立。现在以$g_4(t)$代替（43,4）中的$g(t)$得

(43,22) $$\begin{aligned} y_4(x) &= {}^*A+{}^*\int_a^x \frac{dt}{t+i\sigma} \\ &= {}^*A+\ln\frac{x+i\sigma}{a+i\sigma} \\ &= {}^*A+\ln\frac{ax+\sigma^2-i\sigma(x-a)}{a^2+\sigma^2}. \end{aligned}$$

现在令$\tilde{y}_4(x)=\mathrm{st}(y_4(x))$，则当$x\in R$且$a\leqslant x<0$时成立

(43,23) $$\tilde{y}_4(x)=A+\ln\left|\frac{x}{a}\right|,$$

当$x\in R$且$0<x\leqslant\beta$时成立

(43,24) $$\tilde{y}_4(x)=A+\ln\left|\frac{x}{a}\right|-i\pi$$

这与盖尔芳特[3]的结果一致。

第二种办法，令

(43,25) $$g_5(t)=g_4(t)+g_2(t)$$

这里$g_2(t)$如（43,12）所表示，$g_4(t)$如（43,21）所表示。将$g_5(t)$代替（43,4）中的$g(t)$得

(43,26) $$y_5(t)=y_4(t)+y_2(t)-{}^*A$$

这里$y_2(t)$的表示见（43,13），$y_4(t)$的表示见（43,22）。令$\tilde{y}_5(x)=\mathrm{st}(y_5(x))$，则不难看出

(43,27) $$\tilde{y}_5(x)=\begin{cases} A+\ln\left|\dfrac{x}{a}\right|, & a\leqslant x<0, \\ A+\ln\left|\dfrac{x}{a}\right|-i\pi+C_0, & 0<x\leqslant\beta. \end{cases}$$

请注意，此外C_0可以是任意标准复数。但如果把非标准解$y_5(x)$看作M中的泛函，则（43,13）等式右端后面的项也会起作用，这里就不详细讨论了。

第三种方法，令

$$g_6(t)=g_4(t)+g_3(t), \tag{43,28}$$

这里$g_3(t)$如（43,16）所表示。将$g_5(t)$代替（43,4）中的$g(t)$得

$$y_6(t)=y_4(t)+y_3(t)-{}^*A, \tag{43,29}$$

这里$y_3(x)$如（43,19）所表示。而$y_6(x)$的具体表达式为

$$y_6(x)={}^*A+\ln\frac{x+i\sigma}{\alpha+i\sigma}+\begin{cases}0, & \alpha\leqslant x\leqslant-\sigma\\ 2K\sigma^2, & \sigma\leqslant x\leqslant\beta.\end{cases} \tag{43,30}$$

当K在$^*R$上变化时，后者可以取到$^*R$中的任意常数。特别当$2K\sigma^2$是无限大时，$y_6(x)$在$\sigma\leqslant x\leqslant\beta$没有标准部分，这时导不出（43,1）的非标准解。

在本节最后，我们稍微讨论一下M中一般的奇异n阶线性常微分方程式

$$y^{(n)}(x)+a_1(x)y^{(n-1)}(x)+\cdots+a_n(x)y(x)=a_0(x). \tag{43,31}$$

设$[\alpha,\beta]$是R的闭区间，$\alpha<\beta$，q是$[\alpha,\beta]$上的有限个点的集合。令$\Omega=[\alpha,\beta]\backslash q$，方程（43,31）的系数在$\Omega$有定义。进一步设$q=\bigcup\limits_{n=0}^{l}q_i$，而系数$a_i(x)$在$q_i$无定义，设$\Omega_i=[\alpha,\beta]\backslash q_i$而且$a_i(x)$在$\Omega_i$连续。我们允许某些$q_i$是空集。

现在构造（43,31）在$^*M$的近似方程如下

$$y^{*(n)}(x)+b_1(x)y^{*(n-1)}(x)+\cdots+b_n(x)y(x)=b_0(x), \tag{43,32}$$

这里$b_0(x)$，$b_1(x)$，…，$b_n(x) \in {}^*C$（$[{}^*\alpha, {}^*\beta]$），当 $x\in\Omega$，和 $t\in \text{mon}({}^*x)$时成立

$$(43,33) \qquad \text{st}(b_j(t) - {}^*a_j(t)) = 0,\ j = 0,\ 1,\ \cdots, n,$$

这里${}^*a_j$是a_j通过＊——映射在${}^*\Gamma$中的像。

作为辅助工具，以下介绍一下M中的连续范数和内插不等式。我们以$\mathscr{D}$记某个实数闭区间，$u(x)$是定义在$\mathscr{D}$的函数，而且设$u^{(k)}(x)$在$\mathscr{D}$连续，$k=0$，1，…，n，$n\in N$。我们定义$u(x)$在$\mathscr{D}$的k阶半连续范数为

$$(43,34) \qquad [u]_k^{\mathscr{D}} = \sup_{x\in\mathscr{D}} \left| u^{(k)}(x) \right|, k=0,\ 1,\ \cdots,\ n,$$

和$u(x)$的n限连续范数为

$$(43,35) \qquad \left| u \right|_n^{\mathscr{D}} = \sum_{k=0}^{n} \left[u \right]_k^{\mathscr{D}}$$

参考[30]和[7]，对$0<k<n$，我们有不等式

$$(43,36) \qquad [u]_k^{\mathscr{D}} \leqslant \varepsilon [u]_n^{\mathscr{D}} + C(\varepsilon)[u]_0^{\mathscr{D}},$$

这里ε可以是事先指定的任一正实数，$C(\varepsilon)$是与ε有关的一个正数。

我们把$[u]_k^{\mathscr{D}}$和$|u|_n^{\mathscr{D}}$通过＊——映射在${}^*\Gamma$中的象记为${}^*[u]_k^{\mathscr{D}}$和${}^*|u|_n^{\mathscr{D}}$。同样可以把不等式（43,36）通过＊——映射变到${}^*M$中去。

现在我们转而考虑方程（43,32），它是${}^*M$中系数连续的n阶线性常微分方程。不难看出，在${}^*M$中它在$[{}^*\alpha, {}^*\beta]$的解是存在的，因为我们可以把M中的线性常微分方程的解的存在定理（参看[15]和[45]）通过公设（5,2）转到${}^*M$中去。

以下假设$\mathscr{D}$是Ω的一个闭子区间。由（43,33）可得，在${}^*M$成立

$$(43,37) \qquad {}^*\left| b_j - {}^*a_j \right|_0^{\mathscr{D}} \text{是无限小。}$$

现在假设$y(x)$是(43,32)在$\mathscr{D}$的一个解，而且设$y(x)$有有限界，即存在$m\in R$使得

(43,38) $\quad |y(x)|\leqslant m, x\in\mathscr{D}$.

上式也可以写为

(43,39) $\quad [y]_0^{\mathscr{D}}\leqslant m$.

这样，由微分方程(43,32)可得

(43,40) $\quad {}^*[y]_n^{\mathscr{D}}\leqslant {}^*[b_0]_0^{\mathscr{D}}+{}^*\sum_{j=1}^{n}{}^*[b_j]_0^{\mathscr{D}}\,{}^*[y]_{n-j}^{\mathscr{D}}$.

由(43,36),(43,37),(43,39)和(43,40)得

(43,41) $\quad {}^*[y]_n^{\mathscr{D}}\leqslant K$,

这里K是个有限的正常数，它与m和${}^*[b_j]_0^{\mathscr{D}}$有关,$j=0,1,\cdots,n$。再利用(43,36)可知${}^*[y]_k^{\mathscr{D}}$存在有限上界，$k=0,1,\cdots,n$。

设t和$t+\alpha\in\mathscr{D}$，α是无限小，我们作以下估计

(43,42)
$$|y^{*(n)}(t)-y^{*(n)}(t+\alpha)|$$
$$\leqslant|b_0(t)-b_0(t+\alpha)|$$
$$+|{}^*\sum_{j=1}^{n}\{b_j(t)y^{*(n-j)}(t)-b_j(t+\alpha)y^{*(n-j)}(t+\alpha)\}|$$
$$\leqslant|b_0(t)-b_0(t+\alpha)|$$
$$+{}^*\sum_{j=1}^{n}|b_j(t)-b_j(t+\alpha)||y^{*(n-j)}(t)|$$
$$+{}^*\sum_{j=1}^{n}|b_j(t+\alpha)||y^{*(n-j)}(t)-y^{*(n-j)}(t+\alpha)|.$$

由于

(43,43)
$$|b_j(t)-b_j(t+\alpha)|\leqslant|b_j(t)-{}^*a_j(t)|$$
$$+|{}^*a_j(t)-{}^*a_j(t+\alpha)|+|{}^*a_j(t+\alpha)-b_j(t+\alpha)|$$
$$j=0,1,\cdots,n,$$

并注意到${}^*a_j$在M的连续性和(43,33)，由(43,43)不难得到

(43,44) $|b_i(t)-b_i(t+\alpha)|$是无限小。

另一方面，由于$*[y]_k^{\mathscr{D}}$存在有限上界，$k=0,1,\cdots,n$，因此推得

(43,45) $|y^{*(n-j)}(t)-y^{*(n-j)}(t+\alpha)|$是无限小，
$j=1,\cdots,n$。

再注意到(43,37)，由(43,42)可推得

(43,46) $|y^{*(n)}(t)-y^{*(n)}(t+\alpha)|$是无限小

现在设$x\in\mathscr{D}$（当然成立$x\in R$），定义

(43,47) $y_0(x)=\mathrm{st}(y(x)), y_1(x)=\mathrm{st}(y^{*\prime}(x)),$
$\cdots,\ y_n(x)=\mathrm{st}(y^{*(n)}(x))$.

反复利用定理(24,14)可以得到

(43,38) $y'_0(x)=y_1(x),\cdots,y_0^{(n)}(x)=y_n(x),$

而且$y_n(t)$在$\mathscr{D}$连续。

最后对(43,32)两端取标准部分得$y_0(x)$是(43,31)在$\mathscr{D}$上的解。

这样，在上述条件下，我们证明了：若微分方程（43,31）在$*M$的近似方程（43,32)的解$y(x)$在$\mathscr{D}$存在有限界，则st($y(x)$)就是原方程（43,31)的解。

显然，值得进一步研究的问题还很多，如：

1.方程（43,32)可能有些什么样的非标准解，什么样的非标准解可以导出标准解？

2.具有相同的标准部分的非标准将解还会具有哪些不同的性质等等。

我们不能忘记，即使是最简单的方程(43,1)，它的解，如(43,13)中的$y_2(x)$虽然对不同的常数$C_1,\cdots$，C_n有相同的标准部分，但是若把它们看作M中的泛函，还会得到不相同的结果。

§44 非线性常微分方程

本节我们只着重于说明研究非线性常微分方程的方法，而不在于构成最一般的结果。为了说明这种方法，我们在M中研究如下的初值问题

$$
(44,\ 1)\qquad \begin{cases} y''(x)=f(x,y,y') \\ y(0)=\lambda_0 \\ y'(0)=\lambda_1 \end{cases}
$$

这里设$f(x,y,p)$为足够光滑的函数，它的定义域为：$0\leq$ [illegible]，$-\infty<y,p<+\infty$。我们的主要目的是克服非线性所造成的困难。

为了研究问题(44,1)，我们先研究一下三元函数$f(x,y,p)$。我们以$\dfrac{\partial f}{\partial x}$记$f$对$x$的偏导数，以$\dfrac{\partial f}{\partial y}$记$f$对$y$的偏导数，以$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial p}$记$f$对$y$和$p$的二阶混合导数等等。

用插项的方法不难看出

$$
\begin{aligned}
(44,\ 2)\qquad & f(x,y,p) \\
&= f(x,y,p)-f(x,y,0) \\
&\quad + f(x,y,0)-f(x,0,0)+f(x,0,0) \\
&= \int_0^p \frac{\partial f}{\partial p}(x,y,p_1)\,dp_1+\int_0^y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_1,0) \\
&\quad dy_1+f(x,0,0) \\
&= \int_0^p\int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial p}(x,y_1,p_1)\,dy_1dp_1 \\
&\quad +\int_0^p \frac{\partial f}{\partial p}(x,0,p_1)\,dp_1+\int_0^y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_1,0)\,dy_1 \\
&\quad +f(x,0,0)
\end{aligned}
$$

我们现在在M取一个辅助函数$\varphi(t)$，$\varphi(t)\in C^\infty(R)$，还满

足以下条件

(44, 3) $\quad \varphi(0)=0, \varphi'(0)=1$

和存在一个常数m使得

(44, 4) $\quad |\varphi(t)| \leqslant m, t \in R.$

进一步，取一个辅助函数$\psi(t) \in C^\infty(R)$并满足以下条件

(44, 5) $\quad 0 \leqslant \psi(t) \leqslant 1, t \in R,$ 和

(44, 6) $\quad \psi(0)=1,$

和存在m_1使得

(44, 7) $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\,dt \leqslant m_1.$

作为例子，$\varphi(t)$可以取为 $\sin t$, $\operatorname{arctg} t$, $\psi(t)$ 可以取为 e^{-t^2}等等。

若σ是正无限小，现在研究$*M$的函数

(44, 8) $\quad \tilde{\varphi}(t)=\dfrac{*\varphi(\sigma t)}{\sigma}.$

不难看出，对任何有限的$t \in *R$且$t \neq 0$成立

(44, 9) $\quad \operatorname{st}[\tilde{\varphi}(t)]=\operatorname{st}(t)$

当$t=0$时，(44,9)是可以直接验证的。此外，$\tilde{\varphi}(t)$满足

(44,10) $\quad |\tilde{\varphi}(t)| \leqslant \dfrac{m}{\sigma}, t \in *R.$

现在我们在$*M$构造以下初值问题

(44,11) $\quad \begin{cases} y^{*''}(x)=F(x, y, y^{*'}) \\ y(0)=\lambda_0 \\ y^{*'}(0)=\lambda_1 \end{cases}$

这里$F(x, y, p)$的表示如下

(44,12) $\quad F(x, y, p)$

$$=f(x, 0, 0)$$

$$+ * \int_0^y \tilde{\varphi}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1, 0)\right] d y_1$$

$$+ {}^*\int_0^p \tilde{\varphi}\left[\frac{\partial f}{\partial p}(x,0,p_1)\right]dp_1$$

$$+ {}^*\int_0^p\int_0^y \psi(\sigma y_1)\psi(\sigma p_1)\tilde{\varphi}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial y}(x,y_1,p_1)\right]$$

dy_1dp_1

不难看出，当x，y和p是$^*R$中的有限数时，成立

(44,13)
$$F(x,y,p)$$
$$=f(x,0,0)$$
$$+ {}^*\int_0^y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_1,0)\,dy_1 + {}^*\int_0^p \frac{\partial f}{\partial p}$$
$$(x,0,p)dp_1$$
$$+ {}^*\int_0^p\int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial p\partial y}(x,y_1,p_1)dy_1dp_1 + \text{无限小}。$$

将上式与(44,2)比较，只要x，y和p为$^*R$中的有限数时成立

(44,14)
$$\mathrm{st}(F(x,y,p)) = \mathrm{st}(f(x,y,p)).$$

因此，我们称(44,11)为(44,1)在$^*M$中的近似问题。

下面我们估算

(44,15)
$$|F(x,y,p) - F(x,z,q)|$$
$$\leqslant \left| {}^*\int_q^p \tilde{\varphi}\left[\frac{\partial f}{\partial p}(x,0,p_1)\right]dp_1 \right|$$
$$+ \left| {}^*\int_z^y \tilde{\varphi}\left[\frac{\partial f}{\partial y}x,y_1,0)\right]dy_1 \right|$$
$$+ \left| {}^*\int_0^p\int_0^y \psi(\sigma y_1)\psi(\sigma p_1)\tilde{\varphi}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial y}\right.\right.$$
$$\left.(x,y_1,p_1)\right]dy_1dp_1$$
$$\left. - {}^*\int_0^q\int_0^z \psi(\sigma y_1)\psi(\sigma p_1)\tilde{\varphi}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial y}\right.\right.$$
$$\left.\left.(x,y_1,p_1)\right]dy_1dp_1\right|$$
$$= \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}.$$

这里Ⅰ，Ⅱ和Ⅲ分别代表依次的三个绝对值。由(44,10) 不难看出

$$(44,16)\qquad \mathrm{I} \leqslant \frac{m}{\sigma}|p-q|,$$

和

$$(44,17)\qquad \mathrm{II} \leqslant \frac{m}{\sigma}|y-z|.$$

最后估计Ⅲ，不难看出

$$(44,18)\qquad \mathrm{III} \leqslant \frac{m}{\sigma}\left| {}^*\int_z^y \int_{-{}^*\infty}^{+{}^*\infty} \psi(\sigma p_1)\,dp_1\,dy_1 \right| + \frac{m}{\sigma}\left| {}^*\int_q^p \int_{-{}^*\infty}^{+{}^*\infty} \psi(\sigma y_1)\,dy_1\,dp_1 \right| \leqslant \frac{mm_1}{\sigma^2}\left\{ |y-z| + |p-q| \right\}$$

由(44,15),(44,16),(44,17)和(44,18)得

$$(44,19)\qquad |F(x,y,p)-F(x,z,q)| \leqslant K\{|p-q|+|y-z|\}$$

这里$K=\frac{m}{\sigma}+\frac{mm_1}{\sigma^2}$是$^*R$中的一个数。因此，函数$F(x,y,p)$对$y$和$p$在$^*M$满足Lipschitz条件。

现在我们把M中关于常微分方程初值问题解的存在定理（请参看[45]或[15]的128页）转到$^*M$中来，可知初值问题(44,11)对$x\geqslant 0$在$^*M$存在唯一解$y(x)$，而且这解可以由逐次迭代法构造出来。

现在我们考察一个闭区间$[0,a]$，$a\in R$且$a>0$。若(44,11)存在一个解$y(x)$和一个有限数m_2使得成立下面的关于连续范数的不等式

$$(44,20)\qquad {}^*|y(x)|_3^{[0,a]} \leqslant m_2$$

在这个条件下，当$x\in R$时令

$$(44,21)\qquad \begin{cases} y_0(x)=\mathrm{st}(y(x)) \\ y_1(x)=\mathrm{st}(y^{*\prime}(x)) \\ y_2(x)=\mathrm{st}(y^{*\prime\prime}(x)) \end{cases}$$

反复利用定理 (24,14)得

$$(44,22)\qquad y_0'(x)=y_1(x)\text{和}y''_0(x)=y_2(x),$$

并且$y_0(x)\in C^2([0,a])$。将$y(x)$代入(44,11)后两端取标准部分可得到$y_0(x)$是初值问题(44,1)的在$[0,a]$的解。

在非线性方程的情形，由于缺少类似于(43,40) 的先验估计，所以我们作了很强的假设(44,20)才由非标准解得到(44,1)的标准解。

以下我们研究M中的两点边值问题。

$$(44,23)\qquad \begin{cases} y''(x)=f(x,y,y') \\ f_1(y(0),y'(0))=0 \\ f_2(y(a),y'(a))=0 \end{cases}$$

这里$f(x,y,p)$，$f_1(y,p)$和$f_2(y,p)$对$0\leqslant x\leqslant a$和$y,p\in R$ 是足够光滑的函数。

为了求得 (44,23)的解，我们在$^*M$构造它的近似方程如下

$$(44,24)\qquad \begin{cases} y^{*\prime\prime}(x)=F(x,y,y^{*\prime}) \\ {}^*f_1(y(0),y^{*\prime}(0))=0 \\ {}^*f_2(y(a),y^{*\prime}(a))=0 \end{cases}$$

这里$F(x,y,p)$如(44,12)所表示。然后用逐次迭代法将初值问题(44,11)的解$y(x)$表为λ_0和λ_1的函数，即写为以下形式

$$(44,25)\qquad y(x)=y(x,\lambda_0,\lambda_1).$$

然后将形如(44,25)的解代入(44,24)中的边界条件得

$$(44,26)\qquad \begin{cases} {}^*f_1(y(0,\lambda_0,\lambda_1),y^{*\prime}(0,\lambda_0,\lambda_1))=0 \\ f_2(y(a,\lambda_0,\lambda_1),y^{*\prime}(a,\lambda_0,\lambda_1))=0 \end{cases}$$

上式是关于λ_0和λ_1的二元联立方程组。实际上，(44,24) 的可解性质都由(44,26)来确定。譬如，由(44,26)判定只有一组解

λ_0和λ_1，则(44,24)也只有一个解。如果(44,26)有无限组解λ_0和λ_1，则(44,24)也有无限组解，等等。

如果(44,24)存在解$y(x)$满足(40,20)，则$y_0(x)=\mathrm{st}(y(x))$是(44,23)的解。

本节所讨论的只是对非线性常微分方程寻找其非标准近似解的一种方法，读者可以作出很多的其它方法。

关于解应用问题，作者发表一点很不成熟的看法，仅供参考。由实际问题所列出的微分方程，初值或边界条件等，其本身就只是近似的，存在着一定的误差。它们的列出都是根据实验数据或观察的结果，但观察和实验的数据都有确定的范围。对此观察或实验系统而言，总有观察或实验手段达不到的相对于此系统而言具有相对无限小（或无限大）性质的数σ存在。然后可以作出(44,8)中的辅助函数$\hat{\varphi}(t)$和$\psi(\sigma t)$等函数(当然也可用其它的插值方法，读者可以自由地独立思考）。因而可构造出近似方程(44,11)或(44,24)，以求得非标准的近似解。

按照上面看法，对于非线性问题的处理至少应办到以下两件事：

1.正确地布列方程，初值和边界条件，这个任务与以前一样。

2.给出与此系统有关的一个相对的无限小（或无限大）的数σ，以便于用各种方法构造非标准的近似方程。譬如说，在某个具体问题中，σ可以是某个具体的数，如$\sigma=10^{-10}$，等等，以参与计算。对不同的问题，σ可以不同。

§45 线性奇异椭圆型偏微分方程

本节在M中，我们设Ω是n维欧氏空间R^n中的开域（或闭域。，其边界$\mathscr{F}\Omega$足够光滑。u是定义在Ω上的m次连续可微的函数。我们如下定义u的半连续范数

(45, 1) $$[u]_{k,0,\Omega}=\sup_{x\in\Omega}\sup_{|j|=k}|\partial^j u(x)|,$$

$$k=0,1,\cdots,m,$$

这里$j=(j_1,\cdots,j_n)$，$j_1,\cdots,j_n$是非负整数，$|j|=j_1+\cdots+j_n$，$x=(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega$和

(45, 2) $$\partial^j u(x)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{j_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{j_n}u(x_1,\cdots,x_n).$$

进一步对$0<\alpha\leqslant 1$定义半范数

(45, 3) $$[u]_{0,\alpha,\Omega}=\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\x\neq y}}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

和

(45, 4) $$[u]_{k,\alpha,\Omega}=\sup_{|j|=k}[\partial^j u]_{0,\alpha,\Omega},$$

$$k=1,\cdots,m.$$

现在可以如下定义u的两个范数

(45, 5) $$|u|_{m,\Omega}=\sum_{k=0}^{m}[u]_{k,0,\Omega}$$

和

(45, 6) $$|u|_{m,\alpha,\Omega}=|u|_{m,\Omega}+[u]_{m,\alpha,\Omega}.$$

如果$|u|_{m,\Omega}$是有限数，则记作$u\in C^m(\Omega)$，如果$|u|_{m,\alpha,\Omega}$是有限数，则记作$u\in C^{m,\alpha}(\Omega)$，$C^m(\Omega)$和$C^{m,\alpha}(\Omega)$都是Banach空间。

在$*M$中，通过$*$——映射，半范数和范数的记号$[u]_{0,\alpha,\Omega}$，$[u]_{k,\alpha,\Omega}$，$|u|_{m,\Omega}$和$|u|_{m,\alpha,\Omega}$所对应的分别是$*[u]_{0,\alpha,\Omega}$，$*[u]_{k,\alpha,\Omega}$，$*|u|_{m,\Omega}$和$*|u|_{m,\alpha,\Omega}$等。即在前面加上一个“$*$”号，以资区分。

本节仍着重说明方法，故只在M中讨论如下的二阶线性椭圆型方程的Dirichlet问题。

$$
(45,\ 7)\qquad \begin{cases} Lu = \sum_{i\ j=1}^{n} a_{ij}(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j} \\ \qquad + C(x)u = f(x), x\in\bar{\Omega}\backslash q \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}
$$

这里Ω是R^n中的有界开域，$a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$，对某个正的常数λ成立

$$
(45,\ 8)\qquad \sum_{i\ j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda \sum_{i=1}^{n}\xi^2{}_i, \forall x\in\bar{\Omega}\backslash q,
$$

这里$(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in R^n$，$q$是$\bar{\Omega}$中的测度为零的闭集，它可以被分解为

$$
(45,\ 9)\qquad q = \left(\bigcup_{i\ j=1}^{n} q_{ij}\right)\bigcup\left(\bigcup_{j=1}^{n} r_j\right)\bigcup r\bigcup s,
$$

这里q_{ij}，r_j，r和s皆为$\bar{\Omega}$的测度为零的闭子集，它们使得

$a_{ij}\in C^{0,\alpha}(\mathscr{D})$，$\mathscr{D}$为$\bar{\Omega}\backslash q_{ij}$的任意闭子集；

$b_j\in C^{0,\alpha}(\mathscr{D})$，$\mathscr{D}$为$\bar{\Omega}\backslash r_j$的任意闭子集；

$C(x)\in C^{0,\alpha}(\mathscr{D})$，$\mathscr{D}$为$\bar{\Omega}\backslash r$的任意闭子集；

$f\in C^{0,\alpha}(\mathscr{D})$，$\mathscr{D}$为$\bar{\Omega}\backslash s$的任意闭子集。

现在在$*M$引入(45,7)的近似方程

$$
(45,10)\qquad \begin{cases} \mathscr{L}u = *\sum_{i\ j=1}^{n} A_{ij}(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + *\sum_{j=1}^{n} B_j(x) \\ \qquad \dfrac{\partial u}{\partial x_j} + C_0(x)u = F(x), x\in *\bar{\Omega} \\ u|_{\mathscr{F}*\Omega} = 0 \qquad\qquad (*), \end{cases}
$$

上式中的偏导数都是$*M$中的，系数A_{ij}, B_j, C_0和$F\in *C^{0,\alpha}(*\bar{\Omega})$，而且满足以下的近似条件

$$
(45,11)\qquad *|A_{ij}-a_{ij}|_{0,\alpha,\mathscr{D}}, *|B_j-b_j|_{0,\alpha,\mathscr{D}},
$$

$$
|C_0-C|_{0,\alpha,\mathscr{D}}\text{和}|F-f|_{0,\alpha,\mathscr{D}}\text{都是无限小。}
$$

上式中$\mathscr{D}$是$\bar{\Omega}\backslash q$的任意闭子域。

Dirichlet问题(45,10)是$*M$中的非奇异问题，可以在$*M$中用通常的办法解决，这只需将M中的理论通过公设(5,2)转到$*M$中来。本书就不去讨论这个问题了。本书所关心的是：如何利用$*M$中非奇异问题(45,10)的解去构造M中的奇异问题(45,7)的解。

本文所要讨论的是，如果已经找到了(45,10)的一个解$u(x)\in *C^{2,\alpha}(*\bar{\Omega})$，如何导出(45, 7)的解。

设$\mathscr{D}_2$是$\bar{\Omega}\backslash q$的闭子域，且$\mathscr{D}_2$与q的距离不为零，并设存在有限数$m(\mathscr{D}_2)$使得

(45,12) $|u(x)|\leqslant m(\mathscr{D}_2),\quad \forall x\in\mathscr{D}_2.$

自然我们必须设$\bar{\Omega}\backslash q$有足够好的连通性和有限可覆盖性（参看图(45,13)）。

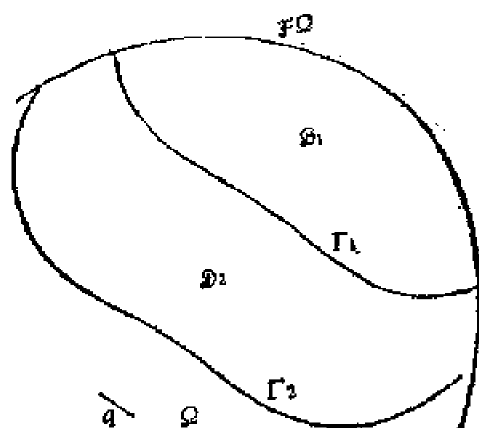


图 (45,13)

如图(45,13)所表示，又设$\mathscr{D}_1$也是$\bar{\Omega}\backslash q$的闭子集，$\mathscr{D}_1$与q的距离也不为零，$\mathscr{D}_1\sqsubset\mathscr{D}_2$，$\mathscr{D}_1$和$\mathscr{D}_2$的边界都足够光滑。又以$\Gamma_1$和$\Gamma_2$分别表示$\mathscr{D}_1$和$\mathscr{D}_2$在$\Omega$内的那部分边界，又$\Gamma_1$和$\Gamma_2$的距离不为零。这样，我们可以把〔7〕，〔30〕，〔32〕和〔37〕中的M中的先验估计的结果转到$*M$中来。为了表示得更清楚，我们把(45,10)写成以下形式

$$(45,14)\ \begin{cases} Lu=(Lu-\mathscr{L}u)+F(x)=\tilde{F}(x),x\in\mathscr{D}_2 \\ u|_{\partial\Omega}=0\ . \end{cases}$$

请注意到

$$(45,15)\qquad \tilde{F}(x)={}^*\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}-A_{ij}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\cdot\partial x_j}$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left(b_j-B_j\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}+\left(C-C_0\right)u$$

$$+F-f+f$$

和注意到(45,11)，不难看出

$$(45,16)\qquad {}^*\ |u|_{2,\alpha,\mathscr{D}_1}\leqslant K<(m(\mathscr{D}_2)+|f|_{0,\alpha,\mathscr{D}_2}),$$

这里K是有限常数，这是因为（45,14）中的 L 是标准 微分算符。

现在在$\mathscr{D}_1$内令

$$(45,17)\qquad u_0(x)=\mathrm{st}(u(x))$$

这里$x\in\mathscr{D}_1$.

现在将M中的第二型曲线积分的理论转到${}^*M$中来，我们有以下公式

$$(45,18)\qquad u(x)=u(x_0)+{}^*\int_{x_0}^{x}\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\cdots$$

$$+\frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n,$$

这里x_0，$x\in{}^*\mathscr{D}_1$，积分与路径无关，特别成立以下等式，

$$(45,19)\qquad u(x_1+h,x_2,\cdots,x_n)-u(x_1,\cdots,x_n)$$

$$={}^*\int_{x_1}^{x_1+h}\frac{\partial u}{\partial x_1}(t_1,x_2,\cdots,x_n)dt_1.$$

对此式两端取标准部分得

$$(45,20)\qquad u_0(x_1+h,x_2,\cdots,x_n)-u_0(x_1,\cdots,x_n)$$

$$=\mathrm{st}\left\{{}^*\int_{x_1}^{x_1+h}\frac{\partial u}{\partial x_1}(t_1,x_2,\cdots,x_n)dt_1\right\}.$$

与(24,14)类似，由(45,16)和(45,20)可以证明

$$\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_1}=\mathrm{st}\left\{\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\right\}, \tag{45,21}$$

这里$x\in\mathscr{D}_1$是标准点。依次类推，可得以下等式

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_0(x)}{\partial x_i}=\mathrm{st}\left\{\dfrac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right\}\\ \dfrac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_i\partial x_j}=\mathrm{st}\left\{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(x)\right\},\end{cases} \tag{45,22}$$

这里$x\in\mathscr{D}_1$是标准点，$i,j=1,\cdots,n$。由此不难证明：$u_0\in C^2(\mathscr{D}_1)$。进一步还可证明：$u_0\in C^{2,\alpha}(\mathscr{D}_1)$。事实上，由(45,16)可得

$$|\partial^2 u(x)-\partial^2 u(x')|\leqslant K_1|x-x'|^{\alpha}, \tag{45,23}$$

这里x，$x'\in\mathscr{D}_1$是标准点，K_1是有限常数。对(45,23)两端取标准部分得

$$|\partial^2 u_0(x)-\partial^2 u_0(x')|\leqslant K_2|x-x'|^{\alpha}, \tag{45,24}$$

这里K_2是个标准常数。因此，$u_0\in C^{2,\alpha}(\mathscr{D}_1)$。

最后对(45,10)取标准部分可推得$u_0(x)$是(45,7)在$x\in D_1$的一个解。至于u_0的奇异地方可以由相应的非标准近似解$u(x)$的状况给以一种表示。

显然，这里的讨论只是很初步的，还有很多的问题需要进一步阐明，需要大量的例题。

又如果回忆一下§16的理论，那里提供了极限理论与无限小理论互相过渡的桥梁。因此不难看出一种可能，即用极限理论来描述本节的内容。不过，这样的描述不如本节的这么直观和方便。

§46 非线性椭圆型偏微分方程

与前一节一样，本节也只着重说明方法。因此，我们只研

究M中着重讨论如下的椭圆型偏微分方程的典型的Dirichlet问题

(46,1)
$$\begin{cases} Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \\ \quad = f\left(x, u, \dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right), x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

这里$a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$，且对某常数$\lambda > 0$成立$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$，$\forall x \in \Omega$；$\Omega$是$n$维欧氏空间$R^n$中的有界域，其边界$\partial\Omega$充分光滑；$f(x, u, p_1, \cdots, p_n)$是$\Omega \times R \times R^n$上的足够光滑的函数。

现在我们用插项的办法推导以下公式

(46,2)
$$\begin{aligned} & f(x, u, p_1, \cdots, p_n) \\ & = f(x, 0, \cdots, 0) + f(x, u, p_1, \cdots, p_n) - f(x, u, p_1, \cdots, \\ & \quad p_{n-1}, 0) + f(x, u, p_1, \cdots, p_{n-1}, 0) - \cdots + f(x, u, o, \cdots \\ & \quad o) - f(x, 0, \cdots, 0) \\ & = f(x, 0, \cdots, 0) + \int_0^{p_n} \frac{\partial f}{\partial p_n}(x, u, \cdots, p_{n-1}, t_n) dt_n + \\ & \quad + \int_0^{p_{n-1}} \frac{\partial f}{\partial p_{n-1}}(x, u, \cdots, p_{n-2}, t_{n-1}, 0)\, dt_{n-1} + \cdots \\ & \quad + \int_0^{p_1} \frac{\partial f}{\partial p_1}(x, u, t_1, 0, \cdots 0) dt_1 + \int_0^u \frac{\partial f}{\partial u} \\ & \qquad (x, z, 0, \cdots, 0) dz \\ & = f(x, 0, \cdots, 0) + \int_0^u \frac{\partial f}{\partial u}(x, z, 0, \cdots, 0) dz \\ & \quad + \int_0^{p_1} \frac{\partial f}{\partial p_1}(x, 0, t_1, 0, \cdots, 0) dt_1 + \cdots \end{aligned}$$

$$+\int_0^{p_n}\frac{\partial f}{\partial p_n}(x,0,\cdots,0,t_n)\,dt_n$$

$$+\int_0^u\int_0^{p_1}\frac{\partial^2 f}{\partial p_1\partial u}(x,z,t_1,0,\cdots,0)\,dz\,dt_1+\cdots$$

$$+\int_0^u\int_0^{p_n}\frac{\partial^2 f}{\partial p_n\partial u}(x,z,0,\cdots,0,t_n)\,dz\,dt_n$$

$$+\int_0^{p_1}\int_0^{p_2}\frac{\partial^2 f}{\partial p_1\partial p_2}(x,o,t_1,t_2,o,\cdots,o)\,dt_1dt_2$$

$$+\cdots$$

$$+\int_0^{p_{n-1}}\int_0^{p_n}\frac{\partial^2 f}{\partial p_{n-1}\partial p_n}(x,0,\cdots,0,t_{n-1},t_n)\,dt_{n-1}$$

$$dt_n+\cdots$$

$$+\int_0^u\int_0^{p_1}\cdots\int_0^{p_n}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial u\partial p_1\cdots\partial p_n}(x,z,t_1,\cdots,t_n)$$

$$dz\,dt_1\cdots dt_n$$

我们将分别情况进行讨论。

第一种情况是：若存在$\varepsilon_0>0$使得对$x\in\overline{\Omega}$和$z\in R$成立以下不等式

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x,z,0,\cdots,0)\geqslant\varepsilon_0 \tag{46,3}$$

在此条件下，我们估计一下(46,1)所解的极值.

如果设(46,1)存在解$u\in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$在$x_0\in\Omega$内达到正的最大值$u(x_0)$，则成立以下不等式

$$f(x_0,0,\cdots,0)+\int_0^{u(x_0)}\frac{\partial f}{\partial u}(x,z,0,\cdots,0)\,dz\leqslant 0 \tag{46,4}$$

由此不难推得

$$u(x_0)\leqslant\frac{|f(x_0,0,\cdots,0)|}{\varepsilon_0} \tag{46,5}$$

类似地，若$u(x)$在$x'\in\Omega$达到负的最小值$u(x')$，则成立以下

不等式

$$f(x',0,\cdots,0)+\int_0^{u(x')}\frac{\partial f}{\partial u}(x',z,0,\cdots,0)dz\geqslant 0 \tag{46,6}$$

由此不难推得

$$|u(x')|\leqslant\frac{|f(x',0,\cdots,0)|}{\varepsilon_0} \tag{46,7}$$

综合(46,5)和(46,7)可以得到

$$\max_{x\in\Omega}|u(x)|\leqslant\frac{\max\limits_{x\in\Omega}|f(x,0,\cdots,0)|}{\varepsilon_0} \tag{46,8}$$

下面我们将建立(46,2)右端各项在$*M$的近似表达式。首先研究

$$I(x,u(x))=\int_0^{u(x)}\frac{\partial f}{\partial u}(x,z,0,\cdots,0)dz \tag{46,9}$$

为了作成$I(x,u(x))$的近似，我们在$*M$定义以下函数

$$g_u(x,z)=\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial u}(x,z,0,\cdots,0), & |z|\leqslant B_0,\\ \varepsilon_0, & |z|\geqslant 2B_0,\end{cases} \tag{46,10}$$

在其余地方令$g_u\in *C'(*\bar{\Omega}\times *R)$且不小于$\varepsilon_0$，并且设$B_0$是正无限大.现在取$I(x,u(x))$在$*M$的近似值为

$$\tilde{I}(x,u(x))=*\int_0^{u(x)}g_u(x,z)dz \tag{46,11}$$

在$*M$中，从上式可以得到以下不等式

$$|\tilde{I}|_{0,0,*\bar{\Omega}}\leqslant|g_u|_{1,0,*\bar{\Omega}\times *R}|u|_{0,0,*\bar{\Omega}} \tag{46,12}$$

为了简单，在上式中我们把范数前的“$*$”号省略了，以下也如此，请读者注意分辨。

进一步，我们进行以下估计

$$\begin{aligned}&|\tilde{I}(x,u(x))-\tilde{I}(x',u(x'))| \\ &=\left|*\int_0^{u(x)}g_u(x,z)\,dz-*\int_0^{u(x')}\right. \end{aligned} \tag{46,13}$$

$$g_u(x',z)dz|$$

$$\leqslant |*\int_0^{u(x)}\left[g_u(x,z)-g_u(x',z)\right]dz|$$

$$+\left|*\int_{u(x)}^{u(x')}g_u(x',z)dz\right|$$

$$\leqslant |g_u|_{0,1,*\bar{\Omega}\times *R}|u|_{0,0,*\bar{\Omega}}|x-x'|$$

$$+|g_u|_{0,0,*\bar{\Omega}\times *R}[u]_{0,1*\bar{\Omega}}|x-x'|.$$

由(4,12)和(4,13)得到$*M$的不等式

(46,14) $$|\tilde{I}|_{0,1,*\bar{\Omega}}\leqslant K(g_u)|u|_{0,1,*\bar{\Omega}},$$

这里$K(g_u)$是依赖于$|g_u|_{0,1*\bar{\Omega}\times *R}$的常数。

现在对(46,2)的右端的项

(46,15) $$I_{p_1}(x,p_1(x))=\int_0^{p_1(x)}\frac{\partial f}{\partial p_1}(x,o,t_1,o,\cdots,o)dt_1$$

在$*M$中引进相应的近似项，为此在$*M$定义以下函数

(46,16) $$g_{p_1}(x,x_1)=\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial p_1}(x,0,t_1,0,\cdots,0), & |t_1|\leqslant B_0\\ 0, & |t_1|\geqslant 2B_0\end{cases}$$

在其余地方令$g_{p_1}\in *C'(*\bar{\Omega}\times *R)$，这里$B_0$是正无限大。

类似地，我们取$I_{p_1}(x,p_1(x))$在$*M$的近似项为

(46,17) $$\tilde{I}_{p_1}(x,p_1(x))=*\int_0^{p_1(x)}g_{p_1}(x,t_1)dt_1.$$

在$*M$我们可以直接得到以下估计

(46,18) $$|\tilde{I}_{p_1}|_{0,0,*\bar{\Omega}}\leqslant|g_{p_1}|_{0,0,*\bar{\Omega}\times *R}|p_1|_{0,0,*\bar{\Omega}}.$$

进一步，还可得到以下不等式

(46,19) $$|\tilde{I}_{p_1}(x,p_1(x))-\tilde{I}_{p_1}(x',p_1(x'))|$$

$$\leqslant|g_{p_1}|_{0,1,*\bar{\Omega}\times *R}|p_1|_{0,0,*\bar{\Omega}}|x-x'|$$

$$+|g_{p_1}|_{0,0,*\bar{\Omega}*\times R}|p_1|_{0,1,*\bar{\Omega}}|x-x'|.$$

由 (46,18) 和 (46,19) 得到在$*M$成立以下不等式

(46,20) $\quad |\tilde{I}_{p_1}|_{0,\gamma_1,*\bar{\Omega}} \leqslant K(g_{p_1})|p_1|_{0,\gamma_1,*\bar{\Omega}},$

这里$K(g_{p_1})$是依赖于$|g_{p_1}|_{0,\gamma_1,*\bar{\Omega}\times *R}$有关的常数0

对（46,2）右端的每一项都可类似地在$*M$作出其相应的近似项，对（46,2）右端最后一项的近似项可以如下作出，最后一项表示为

(46,21)
$$I_{up_1\cdots p_n}(x,u(x),p_1(x),\cdots,p_n(x)) = \int_0^u\int_0^{p_1}\cdots\int_0^{p_n}\frac{\partial^{n+1}f}{\partial u\partial p_1\cdots\partial p_n}(x,z,t_1,\cdots,t_n)\,dzdt_1\cdots dt_n.$$

为了引进上式在$*M$的近似项，我们在$*M$定义以下函数

(46,22)
$$g_{up_1\cdots p_n}(x,z,t_1,\cdots,t_n) = \begin{cases}\dfrac{\partial^{n+1}f}{\partial u\partial p_1\cdots\partial p_n}(x,z,t_1,\cdots,t_n), \text{若} |z|\leqslant B_0, \\ \quad |t_j|\leqslant B_0 \text{对} j=1,\cdots,n \text{同时成立；} \\ 0, \text{若} |z|\geqslant 2B_0 \text{或} |t_j|\geqslant 2B_0 \text{对} j=1,\cdots,n \text{中的} \\ \text{某一个成立；}\end{cases}$$

在其余地方令$g_{up_1\cdots p_n}\in *C'(*\bar{\Omega}\times *R\times *R^n)$，

这里B_0仍是正无限大。

现在取$I_{up_1\cdots p_n}(x,u(x),p_1(x),\cdots,p_n(x))$在$*M$的近似为

(46,23)
$$\tilde{I}_{up_1\cdots p_n}(x,u(x),p_1(x),\cdots p_n(x)) = *\int_0^{u(x)}\int_0^{p_1(x)}\cdots\int_0^{p_n(x)} g_{up_1\cdots p_n}(x,z,t,\cdots,t_n)d_zdt_1\cdots dt_n$$

首先不难看出

(46,24)
$$|\tilde{I}_{up_1\cdots p_n}|_{0,0,*\bar{\Omega}} \leqslant (2B_0)^n|u|_{0,0,*\bar{\Omega}}|g_{up_1\cdots p_n}|_{0,0,*\bar{\Omega}\times *R\times *R^n}.$$

进一步，对x和$x'\in *\bar{\Omega}$，我们有以下不等式

(46,25)
$$|\tilde{I}up_1\cdots p_n(x,u(x),p_1(x),\cdots,p_n(x))$$
$$-\tilde{I}up_1\cdots p_n(x',u(x'),p_1(x'),\cdots,p_n(x'))|$$
$$\leqslant\left|*\int_0^{u(x)}\cdots\int_0^{p_n(x)}\left[g_{up_1\cdots p_n}(x,z,t_1,\cdots,t_n)\right.\right.$$
$$\left.\left.-g_{up_1\cdots p_n}(x',z,t_1,\cdots,t_n)\right]dzdt_1\cdots dt_n\right|$$
$$+\left|*\int_0^{u(x)}\cdots\int_0^{p_n(x)}g_{up_1\cdots p_n}(x',z,t_1,\cdots,t_n)dzdt_1\cdots dt_n\right.$$
$$\left.-*\int_0^{u(x')}\cdots\int_0^{p_n(x')}g_{up_1\cdots p_n}(x',z,t_1,\cdots,t_n)dzdt_1\cdots dt_n\right|$$
$$=\mathrm{I}+\mathrm{II},$$

这里我们以Ⅰ和Ⅱ代表依次的两个绝对值。由（46,22）不难看出，在 $*M$ 成立以下不等式

(46,26) $$I\leqslant(2B_0)^{n+1}[g_{up_1\cdots p_n}]_{0,1,*\bar{\Omega}\times *R\times *R^n}|x-x'|.$$

进一步可以估出

(46,27) $$\mathrm{II}\leqslant(2B_0)^n[g_{up_1\cdots p_n}]_{0,0,*\bar{\Omega}\times *R\times *R^n}\cdot\left\{[u]_{0,1,*\bar{\Omega}}+\sum_{i=1}^n[p_i]_{0,1,*\bar{\Omega}}\right\}|x-x'|.$$

由（46,24)至（46,27)可推得在 $*M$ 成立以下估计

(46,28) $$|\tilde{I}up_1\cdots p_n|_{0,1,*\bar{\Omega}}\leqslant K\left\{|u|_{0,1,*\bar{\Omega}}+\sum_{i=1}^n|p_i|_{0,1,*\bar{\Omega}}\right\},$$

这里 K 是与 $|g|_{0,1,*\bar{\Omega}\times *R\times *R^n}$ 及 B_0 有关的正常数。

我们已经对（46,2）右端的每一项都在 $*M$ 引进了一个近似项，然后定义函数

(46,29) $$F(x,u(x),p_1(x),\cdots,p_n(x))$$
$$=f(x,0,\cdots,0)+\tilde{I}(x,u(x))$$
$$+\tilde{I}p_1(x,p_1(x))+\cdots$$

$$+\tilde{I}_{up_1\cdots p_n}(x,p_1(x),\cdots,p_n(x)).$$

于是在 $*M$ 成立以下估计

$$(46,30)\qquad |F|_{0,1,*,*\bar{B}}\leqslant K\{|f(x,0,\cdots,0)|_{0,1,*\bar{\Omega}}+|u|_{0,1,*\bar{\Omega}}+\sum_{i=1}^{n}|p_i|_{0,1,*\bar{\Omega}}\},$$

这里 K 是 $*R$ 中的一个常数，与上式括号中最后两项无关。

此外，不难看出，当 $u(x)$，$p_1,(x)\cdots,p_n(x)$ 是有限数时，成立以下等式

$$(46,31)\qquad F(x,u(x),p_1(x),\ \cdots,p_n(x))=f(x,u(x),p_1(x),\cdots,p_n(x)).$$

现在引入（46,1）在 $*M$ 的近似问题如下

$$(46,32)\qquad \begin{cases} Lu=\sum\limits_{ij=1}^{n}a_{ij}(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial_{xj}\partial_{xi}} \\ \qquad =F(x,u(x),p_1(x),\cdots,p_n(x)),x\in *\Omega, \\ u|\mathscr{F}*\Omega=0\ ,(\text{注意：此处}p_i(x)=\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x)). \end{cases}$$

把〔7〕,〔30〕和〔32〕中先验估计的结果由公设（5,2）转到 $*M$ 中来，则（46,32）的解 $u(x)$ 满足以下不等式

$$(46,33)\qquad |u|_{2,1*\bar{\Omega}}\leqslant K\{|F|_{01*\bar{\Omega}}+|u|_{00*\bar{\Omega}}\}.$$

这里 K 是 $*M$ 中的一个常数.

以下还需讨论一下 $|u|_{00*\bar{\Omega}}$ 的估计。如果（46,32）的解 $u(x)$ 在内点 $x_0\in *\Omega$ 达到正的最大值，则成立

$$p_1(x_0)=p_2(x_0)=\cdots=p_n(x_0)=0.$$

注意到 F 的表示（46,29），此时成立

$$(46,34)\qquad F(x_0,u(x_0),p_1(x_0),\cdots,p_n(x_0))=f(x_0,0,\cdots,0)+\tilde{I}(x_0,u(x_0))\leqslant 0.$$

再注意到 $\tilde{I}(x,u(x))$ 的表示(46,11)和(46,10)得

(46,35)　　$u(x_0) \leqslant \dfrac{|f(x_0,0,\cdots,0)|}{\varepsilon_0}$.

类似地，若$u(x)$在内点$x'_0 \in {}^*\Omega$达到负的最小值，则成立估计

(46,36)　　$|u(x'_0)| \leqslant \dfrac{|f(x',0,\cdots,0)|}{\varepsilon_0}$.

由(46,35)和(46,36)得到在${}^*M$成立以下估计

(46,37)　　$|u|_{0,0,{}^*\bar{\Omega}} \leqslant \dfrac{|f(x,0,\cdots,0)|_{0,0,{}^*\bar{\Omega}}}{\varepsilon_0}$.

现在利用(46,30)和(46,33)，在${}^*M$得到不等式

(46,38)　　$$|u|_{2,1,{}^*\bar{\Omega}} \leqslant K\left\{|f(x_0,0,\cdots,0)|_{0,1,{}^*\bar{\Omega}} + |u|_{0,1,{}^*\bar{\Omega}} + {}^*\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u_i}{\partial x}\right|_{0,1,{}^*\bar{\Omega}}\right\},$$

这里K是与括号中后面两项无关的正常数。

现在利用众所周知的内插不等式，（读者可参看[7]的135页）

(46,39)　　$|u|_{j,\beta,\bar{\Omega}} \leqslant \varepsilon |u|_{k,\alpha,\bar{\Omega}} + C(\varepsilon)|u|_{0,0,\bar{\Omega}}$,

这里$j+\beta<k+\alpha$，$j=1,\cdots,k-1$，$k\in N$，$0\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant1$。当然，(46,39)只是$M$中的不等式，我们还要利用公设（5,2）把它转到${}^*M$中去，才能使用。

由(46,37)，(4,38)和(46,39)可推得以下不等式，

(46,40)　　$|u|_{2,1,{}^*\bar{\Omega}} \leqslant K$。

这是K是${}^*R$中的一个常数，它与$u(x)$无关。这样，由Lerag-Schauder不动点原理（读者可参看[7]的231页）得到(46,32)的解$u(x)$是存在的，而且$u\in{}^*C^{2,1}({}^*\bar{\Omega})$。

一般地说，(46,40)中的常数K是${}^*R$的数。特别，如果设K是${}^*R$中的一个有限的数，当$x\in\Omega(\subset R^n)$，定义

(46,41)　　$u_0(x)=st(u(x))$

则成立以下等式

$$(46,42)\qquad \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i} = st\left\{\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right\},$$

$$(46,43)\qquad \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_i \partial x_j} = st\left\{\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right\}.$$

对(46,32)两端取标准部分得$u_0(x)$满足(46,1)。由于我们这里设(46,40)中的K是有限的，故推得$u_0(x)\in C^{2,1}(\bar{\Omega})$。

第二种情况，如果(46,3)不成立。我们只需作很少一点修正就可以了，只需对(46,9)中的项$I(x,u(x))$作点说明。在构造$I(x,u(x))$的近似项时，仍可以取$g_u(x,z)$为(46,10)所表示的函数，不过这时只要求ε_0是$*R$中某正数就可以了。仍然利用(46,11)构造近似项$\bar{I}(x,u(x))$，其它各项，$I_{p_1}(x,p_1(x)),\cdots,I_{up_1\cdots p_n}(x,u(x),p_1(x),\cdots,p_n(x))$的近似项仍如上面一样的构造出来，于是又得到近似问题(46,32)。

现在分析近似问题(46,32)的解$u(x)$的界。首先指出，存在$*R$的一个常数$\omega_0>2B_0$使得

$$(46,44)\qquad {}^*\!\int_0^{\omega_0} g_u(x,z)dz \geqslant 0$$

和

$$(46,45)\qquad {}^*\!\int_0^{-\omega_0} g_u(x,z)dz \leqslant 0\ .$$

现在设(46,34)的解$u(x)$在内点$x_0\in {}^*\Omega$达到正的最大值$u(x_0)$。若$u(x_0)\leqslant\omega_0$，则已经证明了$u(x)$有上界。若$u(x_0)>\omega_0$，则此时应成立(46,32)，因而有

$$(46,46)\qquad {}^*\!\int_0^{u(x_0)} g_u(x,z)dz + f(x_0,0,\cdots,0)\leqslant 0\,.$$

故由(46,10)和(46,44)推得

$$(46,47)\qquad {}^*\!\int_{\omega_0}^{u(x_0)} g_u(x,z)dz + f(x_0,0,\cdots,0)\leqslant 0.$$

由此不难看出

(46,48) $$u(x_0)\leqslant\omega_0+\frac{f(x_0,0,\cdots,0)}{\varepsilon_0}.$$

类似地可以讨论$u(x)$在$*\Omega$的内点达到负的最小值。代替(46,37)我们有

(46,49) $$|u|_{0,0,*\bar{\Omega}}\leqslant\omega_0+\frac{|f(x,0,\cdots,0)|_{0,0,*\bar{\Omega}}}{\varepsilon_0}$$

与第一种情况采取同样的步骤，我们可以证明近似方程(46,32)存在解$u(x)\in *C^{2,1}(*\bar{\Omega})$，余下的讨论就不必再重复了。

作者在这里只给出问题(46,1)在$*M$中的一种近似求解的方法，包括证明了这种近似解的存在性。当然，近似解法是很多的，而且不同的近似解又会有不同的性质，本书对此没有讨论。

对于实际中的非线性问题，除了把它们列成标准的微分方程边值问题之外，最好还应给出一些必备的无限大性质，以便寻找合适的近似解法。

§47 常系数椭圆型偏微分方程的基本解

在两相微积分的理论中，表述常系数椭圆型偏微分方程的基本解是很方便的。

1.三维Laplace算子的基本解的第一种表示。在M中三维Laplace算子为

(47,1) $$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

此外，设$f(x,y,z)$是一个具有紧致支撑（即在三维欧氏空间R^3的某个有界闭集之外为零）的M中的连续函数。今在$*M$中取函数

(47,2) $$U(r_1)=-\frac{\Phi(Br_1)}{4\pi r_1},$$

这里

(47,3) $$r_1=\{(\xi-\xi_1)^2+(\eta-\eta_1)^2+(\zeta-\zeta_1)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

和

(47,4) $$\Phi(\rho)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\rho e^{-t^2}dt,$$

B是正无限大。在本节中令$B\sigma=1$，则σ是无限小。$\Phi(\rho)$是M中的函数，$\Phi(B\rho)$是$*M$中的函数。

当r_1不是无限小时成立

(47,5) $$\Phi(Br_1)=*\text{sgn}(r_1)+\text{无限小}.$$

请注意，当$r_1=0$时，$U(r_1)$是可去奇点。此外，在$*M$成立导数公式

(47,6) $$*\frac{d}{dr_1}\Phi(Br_1)=\frac{2}{\sigma\sqrt{\pi}}e^{-\left(\frac{r_1}{\sigma}\right)^2}$$
$$=2\delta_1(r_1).$$

这里δ_1的表示请看(33,11)。

现在定义函数$v(\xi,\eta,\zeta)$为

(47,7) $$v(\xi,\eta,\zeta)=*\iiint_{*R_3}f(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)U(r_1)d\xi_1d\eta d\zeta_1.$$

在$*M$中我们引入以下两个Laplace算子的记号

(47,8) $$*\Delta=*\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+*\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+*\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}$$

(47,9) $$*\Delta_1=*\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}+*\frac{\partial^2}{\partial\eta_1^2}+*\frac{\partial^2}{\partial\zeta_2^1}.$$

令Ω是$*R^3$中以(ξ,η,ζ)为中心和以$\sqrt{\sigma}$为半径的小球。下面计算$*\Delta v(\xi,\eta,\zeta)$：

(47,10) $$*\Delta v=*\iiint_{*R^3}f(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)*\Delta U(r_1)d\xi d\eta_1d\zeta_1$$

$$=*\iiint_{*R^3} f(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)*\Delta_1 U(r_1)d\xi_1\eta_1\zeta_1$$

$$=*\iiint_{*R^3} f(\xi_1,d\eta_1,d\zeta_1)\frac{1}{r_1^2}\frac{*d}{dr_1}r_1^2\frac{*d}{dr_1}$$

$$U(r_1)\ d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1$$

$$=-\frac{1}{2\pi}*\iiint_{*R^3} f(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)\frac{1}{r_1}$$

$$\delta_1^{*\prime}(r_1)d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1$$

$$=-\frac{1}{2\pi}*\iint_S dS*\int_0^{*\infty}$$

$$f(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)r_1\delta_1^{*\prime}(r_1)dr_1$$

这里S代表单位球面。

这样，若$(\xi,\eta,\zeta)\in R^3$是标准的，则成立以下公式

(47,11) $\quad \mathrm{st}(*\Delta v(\xi,\eta,\zeta))$

$$=\mathrm{st}\left\{-\frac{1}{2\pi}*\iint_S ds*\int_0^{\sqrt{a}}\right.$$

$$\left.f(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)r_1\delta_1^{*\prime}(r_1)dr_1\right\}.$$

注意到$r_1\delta_1^{*\prime}(r_1)$当$r_1\geqslant 0$是符号固定的函数，所以可 以用积分中值公式(23,2)得

(47,12) $\quad \mathrm{st}(*\Delta v(\xi,\eta,\zeta))$

$$=\mathrm{st}\left\{-\frac{f(\xi_1^0,\eta_1^0,\zeta_1^0)}{2\pi}*\iint_S dS*\int_0^{\sqrt{a}}\right.$$

$$\left.\delta_1^{*\prime}(r_1)r_1 dr_1\right\},$$

这里$(\xi_1^0,\eta_1^0,\zeta_1^0)$是$\Omega$中的一个点，它与$(\xi,\eta,\zeta)$相距为 无限小。因为在$M$中$f(x,,y,z)$是连续的，所以立成

(47,13) $\quad \mathrm{st}(*\Delta v(\xi,\eta,\zeta))$

$$= -2f(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{st}\{{}^*\int_0^{\sqrt{\sigma}} r_1\delta_1^{*\prime}(r_1)dr_1\}$$

$$= 2f(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{st}\{{}^*\int_0^{\sqrt{\sigma}} \delta_1(r_1)dr_1\}$$

$$= f(\xi,\eta,\zeta).$$

如果对f的可微性再加强一些，则可以得到$\Delta v_0 = \mathrm{st}({}^*\Delta v)$，这里$v_0 = \mathrm{st}(v)$。但这些就不仔细讨论了。

2. 三维Laplace算子的基本解的第二种表示。在M中我们定义

$$(47,14)\qquad K(\xi,\eta,\zeta) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\cdot {}^*\iiint\limits_{\sigma_1\leqslant|\alpha|,|\beta|,|\theta|\leqslant B} \frac{e^{i(\xi\alpha+\eta\beta+\zeta\theta)}}{\alpha^2+\beta^2+\theta^2}d\alpha d\beta d\theta,$$

这里σ_1是正无限小，B是正无限大。于是成立以下公式

$$(47,15)\qquad {}^*\Delta K(\xi,\eta,\zeta)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}{}^*\iiint\limits_{\sigma_1\leqslant|\alpha|,|\beta|,|\theta|\leqslant B} e^{i(\xi\alpha+\eta\beta+\zeta\theta)} d\alpha d\beta d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi^3}{}^*\int_{\sigma_1}^{B}\cos\xi\alpha d\alpha\,{}^*\int_{\sigma_1}^{B}\cos\eta\beta d\beta\,{}^*\int_{\sigma_1}^{B}\cos\zeta\theta d\theta$$

$$= \frac{\sin B\zeta - \sin\sigma_1\zeta}{\pi\zeta}\cdot\frac{\sin B\eta - \sin\sigma_1\eta}{\pi\eta}\cdot$$

$$\frac{\sin B\xi - \sin\sigma_1\xi}{\pi\xi}.$$

现在仍然设$f(x,y,z)$是一个具有紧致支撑的M 中的连续函数，我们研究如下定义的函数

$$(47,16)\qquad \tilde{v}(\xi,\eta,\zeta)$$

$$= {}^*\iiint\limits_{{}^*R^3} f(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)\cdot$$

$$K(\xi-\xi_1,\eta-\eta_1,\zeta-\zeta_1)d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1.$$

下面计算${}^*\varDelta\tilde{v}$。不难看出

(47,17))
$$\begin{aligned}&{}^*\varDelta\tilde{v}(\xi,\eta,\zeta)\\&= {}^*\iiint\limits_{{}^*R^3} f(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)\cdot\\&\quad {}^*\varDelta K(\xi-\xi_1,\eta-\eta_1,\zeta-\zeta_1)d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1.\end{aligned}$$

因为在M中$f(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)$具有紧致支撑，故在积分号中，当ξ,η,ζ为有限数时，$\xi-\xi_1,\eta-\eta_1,\zeta-\zeta_1$也是有限数，这时：

$$\frac{\sin\sigma_1(\xi-\xi_1)}{\pi(\xi-\xi_1)},\quad \frac{\sin\sigma_1(\eta-\eta_1)}{\pi(\eta-\eta_1)}\text{和}$$

$$\frac{\sin\sigma_1(\zeta-\zeta_1)}{\pi(\zeta-\zeta_1)}$$

为无限小。特别，当$(\xi,\eta,\zeta)\in R^3$时成立

(47,18)
$$\begin{aligned}&\mathrm{st}\{{}^*\varDelta\tilde{v}(\xi,\eta,\zeta)\}\\&= \mathrm{st}\Big\{{}^*\iiint\limits_{R^3} f(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)\frac{\sin B(\xi-\xi_1)}{\pi(\xi-\xi_1)}d\xi_1\\&\quad\frac{\sin B(\eta-\eta_1)}{\pi(\eta-\eta_1)}d\eta_1\frac{\sin B(\zeta-\zeta_1)}{\pi(\zeta-\zeta_1)}d\zeta_1\Big\}.\end{aligned}$$

进一步，还需设$f(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)$对其每个变元都是有界变化的，由定理(33,35)得

(47,19)
$$\mathrm{st}\{{}^*\varDelta\tilde{v}(\xi,\eta,\zeta)\} = f(\xi,\eta,\zeta).$$

请注意，两个不同的基本解，即(47,2)中的$U(r_1)$与(47,14)中的，$K(\xi-\xi_1,\eta-\eta_1,\zeta-\zeta_1)$，其性质不完全相同。在推导(47,13)时并不要求假设$f(x,y,z)$对它的每个变元是有界变化的。我们应当关心这种性质上的差别。

3.三维Laplace算子的基本解的第三种表示。我们在${}^*M$

定义以下函数

$$(47,20)\qquad H(r_1)=\begin{cases}-\dfrac{1}{4\pi r_1}, & \sigma_1\leqslant r_1<{}^*\infty\\ 0, & 0\leqslant r_1<\sigma_1,\end{cases}$$

这里r_1如(47,3)所表示，σ_1是正无限小。

请注意，H是不连续核，而在古往今来的场论中恰好取的是这个不连续核。今定义以下函数

$$(47,21)\qquad h(\xi,\eta,\zeta)={}^*\iiint\limits_{{}^*R^3}f(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)H(r_1)d\xi_1d\eta_1d\zeta_1,$$

这里设$f(x,y,z)$是M中具有紧致支撑的一次连续可微的函数。设$\xi_1=\alpha+\xi,\eta_1=\beta+\eta,\zeta_1=\theta+\zeta$和$\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\theta^2}$，则成立

$$(47,22)\qquad h(\xi,\eta,\zeta)$$

$$={}^*\iiint\limits_{{}^*R^3}f(\alpha+\xi,\beta+\eta,\theta+\zeta)H(\rho)d\alpha d\beta d\theta$$

$$=-\frac{1}{4\pi}{}^*\iiint\limits_{\rho\geqslant\sigma_1}f(\alpha+\xi,\beta+\eta,\theta+\zeta)\frac{1}{\rho}d\alpha d\beta d\theta.$$

以下计算${}^*\Delta h(\xi,\eta,\zeta)$，不难看出

$$(47,23)\qquad {}^*\Delta h(\xi,\eta,\zeta)$$

$$=\left({}^*\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+{}^*\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+{}^*\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right)h(\xi,\eta,\zeta)$$

$$=-{}^*\frac{\partial}{\partial\xi}\iiint\limits_{\rho\geqslant\sigma_1}\frac{\partial f}{\partial\xi}(\alpha+\xi,\beta+\eta,\theta+\zeta)$$

$$\frac{1}{4\pi\rho}d\alpha d\beta d\theta$$

$$-{}^*\frac{\partial}{\partial\eta}\iiint\limits_{\rho\geqslant\sigma_1}\frac{\partial f}{\partial\eta}(\alpha+\xi,\beta+\eta,\theta+\zeta)\frac{1}{4\pi\rho}d\alpha d\beta d\theta$$

$$-{}^*\frac{\partial}{\partial\zeta}\iiint_{\rho\geqslant\sigma_1}\frac{\partial f}{\partial\zeta}(\alpha+\xi,\beta+\eta,\theta+\zeta)\frac{1}{4\eta\rho}d\alpha d\beta d\theta$$

$$=\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III},$$

这里Ⅰ，Ⅱ和Ⅲ分别代表依次的三个积分。不难看出

$$\text{(47,24)}\qquad \mathrm{I}=-{}^*\frac{\partial}{\partial\xi}\iiint_{\rho\geqslant\sigma_1}\frac{\partial f}{\partial\alpha}(\alpha+\xi,\beta+\eta,\theta+\xi)\frac{1}{4\pi\rho}d\alpha d\beta d\theta$$

$$=-{}^*\frac{\partial}{\partial\xi}\iint_{\rho=\sigma_1}f(\alpha+\xi,\beta+\eta,\theta+\zeta)\frac{1}{4\pi\sigma_1}d\beta d\theta$$

$$+{}^*\frac{\partial}{\partial\xi}\iiint_{\rho\geqslant\sigma_1}f(\alpha+\xi,\beta+\eta,\theta+\zeta)\frac{\alpha}{4\pi\rho^3}d\alpha d\beta d\theta$$

$$=-\frac{1}{4\pi\sigma_1}{}^*\iint_{\rho=\sigma_1}\frac{\partial f}{\partial\alpha}(\alpha+\xi,\beta+\eta,\theta+\zeta)d\beta d\theta$$

$$+{}^*\iint_{\rho=\sigma_1}f(\alpha+\xi,\beta+\eta,\theta+\zeta)\frac{\alpha}{4\pi\rho^3}d\beta d\theta$$

$$-\frac{1}{4\pi}{}^*\iiint_{\rho\geqslant\sigma_1}f(\alpha+\xi,\beta+\eta,\theta+\zeta)\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\alpha}{\rho^3}\right)d\alpha d\beta d\theta.$$

对Ⅱ和Ⅲ也可类似地进行计算。最后可得

$$\text{(47,25)}\qquad \mathrm{st}\{{}^*\Delta h(\xi,\eta,\zeta)\}$$

$$= \mathrm{st}\left\{ * \iint_{\rho=\sigma_1} f(\alpha+\xi, \beta+\eta, \theta+\zeta) \cdot \frac{1}{4\pi\sigma_1^3} \cdot \right.$$

$$\left. [\alpha d\beta d\theta + \beta d\theta d\alpha + \theta d\alpha d\beta] \right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi\sigma_1^2} \mathrm{st}\left\{ * \iint_{\rho=\sigma_1} f(\alpha+\xi, \beta+\eta, \theta+\zeta) dS \right\}$$

$$= f(\xi, \eta, \zeta).$$

请注意：当采用 $*M$ 中的不连续核 $H(r_t)$，如(47,20)所表示，作为Laplace方程的基本解，为了证明(47,25)，仅仅设 $f(\xi, \eta, \zeta)$ 为连续函数是办不到的。

对一般的椭圆型偏微分方程的基本解也应作类似的讨论，以下只举一种表示法。

在 M 中研究如下的常系数的椭圆型微分算子

$$L(\partial)u = \sum_{i_1, \cdots, i_m = 1}^{m} A_{i_1 \cdots i_m} \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_m}}, \tag{47,26}$$

其中 $m > 0$ 是偶数，$u = u(x_1, \cdots, x_n)$ 是 n 元函数，$A_{i_1 \cdots i_m}$ 是常数。如果令(这里 $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$)

$$L(\xi) = \sum_{i_1, \cdots, i_m = 1}^{m} A_{i_1 \cdots i_m} \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_m}, \tag{47,27}$$

它满足椭圆型条件

$$L(\xi) \geqslant \lambda \left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \right]^{\frac{m}{2}}, \tag{47,28}$$

这里 $\lambda > 0$ 是个正常数。现在我们在 $*M$ 定义以下函数

$$K(x_1, \cdots, x_n) \tag{47,29}$$

$$= \frac{i^m}{(2\pi)^n} \cdot$$

$$* \int_{\substack{\sigma_1 \leqslant |\xi_i| \leqslant B \\ i=1,\cdots,n}} \cdots \int e^{i(x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n)} \frac{1}{L(\xi)} d\xi_1 \cdots d\xi_n,$$

这里σ_1是正无限小，B是正无限大。不难看出

$$(47,30)\qquad *L(\partial)K(x_1,\ \cdots,\ x_n)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}*\underset{\substack{\sigma_1\leqslant|\xi_j|\leqslant B\\ j=1,\cdots,n}}{\int\cdots\int} e^{i(x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n)}\ d\xi_1\cdots d\xi_n$$

$$=\prod_{j=1}^{n}\left\{\frac{1}{\pi}*\int_{\sigma_1}^{B}\cos x_j\xi_j d\xi_j\right\}$$

$$=\prod_{j=1}^{n}\left\{\frac{\sin Bx_j-\sin\sigma_1 x_j}{\pi x_j}\right\},$$

即$*L(\partial)K(x_1,\ \cdots,\ x_n)$是一个$n$元的Dirac Delta 函数。还留下很多问题没讨论，请读者深思吧！

附录　多相微积分初步

自此以下研究多相微积分，它推广了两相微积分，对逻辑学不熟悉的同志可以跳过§48进行阅读。

§48　多重模型的存在性

为了建立多相微积分，我们先把鲁滨逊[46]30～34页的理论稍微推广一点。当然，推广的方法很多，这里所采取的是很简单的一种。按照鲁滨逊[46]的记号，设K是一个分层的句子集（即句子中每个地址上只能以同一类型的常量或变量代入），M是K的一个模型（特别，本书是以M代表标准分析的理论）。以Γ代表K中出现的常量的集合，则Γ的元素指称M的个体。我们知道，$*M$是K的另一解释。设$*M$的个体所对应的常量的集合为$*\Gamma$，则$*\Gamma$是Γ的真扩大。例如，$*N$是N的真扩大，我们以$*N$（或N_2）的元素作为第二相的自然数。又$*R$（或R_2）是R的真扩大，我们以$*R$表示第二相的实数集，等等。

由于$*M$也是K的一个解释，我们又可将$*M$扩大。扩大后所得到的内的和外的理论所组成的模型以M_3记之，称为第三相的分析模型，相应的内的理论所组成的模型以$*^2M$记之，称为第三相的内的分析模型。$*^2M$是K的另一解释。

按照有限归纳法，依次下去，设对某个$\beta\in N$，存在非标准的、内的和依次扩大的分析模型

$$*M,\ *^2M,\ \cdots,\ *^\beta M$$

和相应的非标准的分析模型

$$M_2,\ M_3,\ \cdots,\ M_{\beta+1}.$$

对每个i，$1\leqslant i\leqslant\beta$，我们称$*^{i}M$为第$i+1$相的内的非标准分析模型，相应的$M_{i+1}$为第$i+1$相的非标准分析模型。又以$*^{i}N$（或$N_{i+1}$）表示第$i+1$相的自然数集，以$*^{i}R$（或$R_{i+1}$）表示第$i+1$相的实数集。对$i$满足$1\leqslant i$，$i+1\leqslant\beta$，我们当然设$*^{i+1}M$是$*^{i}M$的真扩大。或者具体一点说，$*^{i+1}N$是$*^{i}N$的真扩大，即$*^{i}N$是$*^{i+1}N$的真子集，即存在$n\in *^{i+1}N$便得对一切$m\in *^{i}M$成立$m<n$。

$*^{i}M$是句子集K的一个解释。我们设$*^{i}M$的各型个体所对应的常量集合为$*^{i}\Gamma$。

以下我们进一步将$*^{\beta}M$扩大。

为此，我们先说明一下有限这个概念。按照我们的记号，M中值域为p_2和定义域为p_1的函数的集合表示为$\mathrm{ft}(p_1, p_2)$，扩大后在$*M$中相应的内函数的集合表示为$*\mathrm{ft}(p_1, p_2)$，依次地，在$*^{\beta}M$中相应的内函数的集合表示为$*^{\beta}\mathrm{ft}(p_1, p_2)$。

在M中有限集可以如下定义：若G表示M中某个类型的元素的集合，G是有限的其定义如下

(48,1)
$$\begin{aligned}&(\exists n)(\exists\varphi)[n\in N\wedge\varphi\in\mathrm{ft}(|1,n|,G)\\&\wedge(\forall g)[g\in G\longrightarrow(\exists i)[i\in|1,n|\\&\wedge\varphi(i)=g]]\wedge(\forall i)(\forall j)[i\in|1,n|\wedge i\neq j\\&\wedge j\in|1,n|\longrightarrow\varphi(i)\neq\varphi(j)]],\end{aligned}$$

这里$|1,n|$代表标准自然数的集合$\{i|1\leqslant i\leqslant n\}$。而在$*^{\beta}M$中，若$G$是$*^{\beta}M$中某个类型的元素的集合，$G$是$*^{\beta}$有限的，其定义如下

(48,2)
$$\begin{aligned}&(\exists n)(\exists\varphi)[n\in *^{\beta}N\wedge\\&\varphi\in *^{\beta}\mathrm{ft}(*^{\beta}|1,n|,\ G)\wedge\\&(\forall g)[g\in G\longrightarrow(\exists i)[i\in *^{\beta}|1,n|\\&\wedge\varphi(i)=g]]\wedge(\forall i)(\forall j)\\&[i\in *^{\beta}|1,n|\wedge i\neq j\wedge j\in{}^{\beta}|1,n|\end{aligned}$$

$\longrightarrow \varphi(i) \neq \varphi(j)]]$,

这里$*^{\beta}|1,n|$是$*^{\beta}N$的集合$\{i|1\leqslant i\leqslant n\}$。

我们把在$*^{\beta}M$上成立的分层句子集记为$*^{\beta}K$，因为句子集K在$*^{\beta}M$上成立，所以K是$*^{\beta}K$的子集。设$b\in *^{\beta}\Gamma$，b的类型是b出现在$*^{\beta}K$的句子中的地址上的型。设b的型是$\tau=(\tau_1,\tau_2)$，故b在任何解释中指称二元关系。令Δ_b为$*^{\beta}\Gamma$中使得

(48,3) $$*^{\beta}K\vdash(\exists y)\Phi_{\tau}(b,g,y)$$

成立的所有元素g的集合。这样，在任何解释中Δ_b的常数指称着由b指称的关系的一个变量的变化域上的元素。称b为共点的，如果对Δ_b的每个$*^{\beta}$有限集$\{g_1,\cdots,g_n\}$成立

(48,4) $$*^{\beta}K\vdash(\exists y)[\Phi_{\tau}(b,g,y)\wedge \Phi_{\tau}(b,g_2,y)\wedge\cdots\wedge\Phi_{\tau}(b,g_n,y)],$$

或写成

$$*^{\beta}K\vdash(\exists y)(\forall i)[i\in *^{\beta}|1,n| \longrightarrow\Phi_{\tau}(b,g_i,y)].$$

令Γ_0是$*^{\beta}\Gamma$的共点元素的集合。对每个$b\in\Gamma_0$，我们选择不属于$*^{\beta}\Gamma$的不同的（常数）符号a_b。设在我们的语言中有足够多的（常数）符号可供选用。这是一个很重要的假设，等价于一条公理。所有这种元素a_b的集合以Γ_b记之。

对于每个$b\in\Gamma_0$，当g跑遍Δ_b，句子

(48,5) $$X_{bg}=\Phi_{\tau}(b,g,a_b)$$

的集合为K_b。当b跑遍Γ_0时，句子集K_b的并集记为K_0。令

$$H=*^{\beta}K\cup K_0,$$

称H为$*^{\beta}K$的扩大。

与鲁滨逊[46]中31至33页的讨论类似，设J是一个一阶或高阶语言中的句子集，G是J中出现的常数的集合。令D是由G到常数集合G_1上的（可以是多个对一个的）映射。J的各个句子中的常数按照映射D作了代换所得到的句子集以J_1记之。鲁滨

逊证明了以下定理

(48,6)　　若J_1是协调的，则J也是协调的。

在这个定理的基础上，我们有以下定理

(48,7)　　$*{}^{\beta}K$是协调的，同样，H也是协调的。

证明．因为$*{}^{\beta}M$是$*{}^{\beta}K$的模型，所以$*{}^{\beta}K$是协调的。以下只须证H是协调的。

根据鲁滨逊〔46〕的27页上的定理2.8.1,(有限性原理)，我们只须证明H的每个有限子集是协调的。进一步，设K'_0是K_0的任意有限子集，令$J=*{}^{\beta}K\cup K'_0$，我们只需证明J是协调的。现在令

$$\begin{aligned}K'_0=\{&\Phi_{\tau_1}(b_1,g_{11},a_{b_1}),\cdots,\Phi_{\tau_1}(b_1,g_{1k_1},a_{b_1}),\\&\Phi_{\tau_2}(b_2,g_{21},a_{b_2}),\cdots,\Phi_{\tau_2}(b_2,g_{2k_2},a_{b_2}),\\&\cdots\cdots,\ \cdots,\ \cdots\cdots,\\&\Phi_{\tau_n}(b_n,g_{n1},a_{b_n}),\cdots,\Phi_{\tau_n}(b_n,g_{nk_n},a_{b_n})\},\end{aligned}$$

其中n，$k_1,\cdots$，$kn\in N$，常数b_1，b_2，$\cdots$，b_n各不相同。

由(48,4)可以证明，存在常数a_1，a_2，$\cdots$，a_n使得句子集

$$\begin{aligned}K'_1=\{&\Phi_{\tau_1}(b_1,g_{11},a_1),\cdots,\Phi_{\tau_1}(b_1,g_{1k_1},a_1)\\&\Phi_{\tau_2}(b_2,g_{21},a_2),\cdots,\Phi_{\tau_2}(b_2,g_{21k_2},a_2)\\&\cdots\cdots,\ \cdots,\ \cdots\cdots\\&\Phi_{\tau_n}(b_n,g_{n1},a_n),\cdots,\Phi_{\tau_n}(b_n,g_{nk_n},a_n)\}\end{aligned}$$

在$*{}^{\beta}M$成立。

为此，我们只需证明，对任何$m_0\in N$，$*{}^{\beta}M$的有限集$G=\{g_1,\cdots,g_{m_0}\}$也是$*{}^{\beta}$有限的。为此，设变量$x_1,\cdots,x_{m_0}$的类型相同．由于在M成立以下句子

(48,8)　　$(\forall x_1)\cdots(\forall x_{m_0})(\exists n)(\exists\varphi)[n\in N\wedge\varphi\in \mathrm{ft}(|1,n|,\{x_1,\cdots,x_{m_0}\})\wedge(\forall x)[x\in\{x_1,\cdots,x_{m_0}\}\rightarrow(\exists i)[i\in|1,n|\wedge\varphi(i)=x]]\wedge(\forall i)(\forall j)[i\in[1,n|\wedge i\neq j\wedge j\in|1,n|\longrightarrow\varphi(i)\neq\varphi(j)]]$.

将上式逐次转到$*^{\beta}M$，我们有

(48,9) $(\forall x_1)\cdots(\forall x_{m_0})(\exists n)(\exists\varphi)[n\in *^{\beta}N\wedge\varphi\in *^{\beta}\mathrm{ft}(*^{\beta}|1,n|,\{x_1,\cdots,x_{m_0}\})\wedge(\forall x)[x\in\{x_1,\cdots,x_{m_0}\}\longrightarrow(\exists i)[i\in *^{\beta}|1,n|\wedge\varphi(i)=x]]\wedge(\forall i)(\forall j)[i\in *^{\beta}|1,n,|\wedge i\neq j\wedge j\in *^{\beta}|1,n|\longrightarrow\varphi(i)\neq\varphi(j)]]$.

将(48,9)前面m_0个全称量词去掉，得到

(48,10) $(\exists n)(\exists\varphi)[n\in *^{\beta}N\wedge\varphi\in *^{\beta}\mathrm{ft}(*^{\beta}|1,n|,\{g_1,\cdots,g_{m_0}\})\wedge(\forall x)[x\in\{g_1,\cdots,g_{m_0}\}\rightarrow(\exists i)[i\in *^{\beta}|1,n|\wedge\varphi(i)=x]]\wedge(\forall i)(\forall j)[i\in *^{\beta}|1,n|\wedge i\neq j\wedge j\in *^{\beta}|1,n|\longrightarrow\varphi(i)\neq\varphi(j)]]$.

比较(48,2)和(48,10)我们推得$G=\{g_1,\cdots,g_{m0}\}$是$*^{\beta}$有限的。由这个结果和(48,4)，我们有

(48,11) $*^{\beta}K\vdash K'_1$.

这样，令$J_1=*^{\beta}K\cup K'_1$，则J_1是协调的。由定理(48,6)知J是协调的。因此，H是协调的。定理(48,7)证完。

现在令H所对应的模型为$M_{\beta+2}$，相应的内的理论模型为$*^{\beta+1}M$。$M_{\beta+2}$为$*^{\beta}M$的扩大，$*^{\beta+1}M$为$*^{\beta}K$的另一解释，同样，它也是K的另一解释。按有限归纳法，我们的扩大步骤完成了。

特别，如果以b指称“<”关系，用τ表示b的型，则对$*^{\beta}N$的任意的$*^{\beta}$有限子集$\{1,2,\cdots,n\}$在$*^{\beta}M$成立

(48,12) $(\exists y)(\forall i)[i\in *^{\beta}|1,n|\longrightarrow\Phi_{\tau}(b,i,y)]$.

前面已经指出，$*^{\beta}N$的任意（标准）有限的子集必定是$*^{\beta}$有限的。这样，根据有限性原理（见鲁滨逊[46]的定理2、8、1)，我们知在$M_{\beta+2}$成立句子

(48,13) $(\exists y)(\forall i)[i\in *^{\beta}N\longrightarrow\Phi_{\tau}(b,i,y)]$.

这样，$*^{\beta}N$是$*^{\beta+1}N$的真子集。即$*^{\beta+1}N$中存在y使得对一切$i\in *^{\beta}N$成立$i<y$。那么，相对于$*^{\beta}N$的所有自然数而言，y是无限大。

在下节中，我们仍然用公理化的方法来引进多相微积分学，因为这样比较直观。

§49 多相微积分的公理系

上节简单地证明了多重模型的存在性。如果把多相微积分的基础完全用逻辑的方式推导出来，所需的篇幅太长，因此，还不如用公理化的方法直接引入。

在公设(5,1)和(5,2)中，我们把标准分析M逻辑扩大为$*M$，又$*M$是M_2的一部分。现在引入如下的更加一般的假设。

公设(49,1)、除公设(5,1)中已经提到的有序域R和$*R$之外，还假设存在有序域$*^{\beta}R$，这里$\beta\in N$，它们具有以下性质

1．$*^{\beta}R$可以嵌入$*^{\beta+1}R$成为一个有序子域，或者说，$*^{\beta+1}R$存在一个有序子域$R_{\beta+1}$与$*^{\beta}R$同构。我们称$R_{\beta+1}$中的数为第$\beta+1$相的实数。在比较放松的情况下，我们把$*^{\beta}R$与$R_{\beta+1}$看成是同一的。

2．$*^{\beta+1}R$中存在正数ε，它小于$*^{\beta}R$的每一个正数。

我们以$M_{\beta+1}$表示$*^{\beta}R$上建立的全部理论，以$\Gamma_{\beta+1}$表示$M_{\beta+1}$中出现的各型常量对象的集合，则$\Gamma_{\beta+1}$是$*^{\beta}R$上各型常量对象的集合。进一步，我们引入以下公设。

公设(49,2)。对每个$\beta\in N$，$M_{\beta+1}$存在部分理论$*^{\beta}M$，并且使得$*^{\beta+1}M$是$*^{\beta}M$的扩大。如果以$*^{\beta}\Gamma$记$*^{\beta}M$中出现的各型常量对象的集合，则$*^{\beta}\Gamma$是$\Gamma_{\beta+1}$的子集。更确切地说，成立以下性质。

1．常量的对应　设$*^{\beta+1}\Gamma$存在一个子集$\bar{\Gamma}_{\beta+1}$，它与$*^{\beta}\Gamma$

之间存在一个双方单值的映射$T_{\beta+1}$。$T_{\beta+1}$保持$R_{\beta+1}$与$*^{\beta}R$之间的同构，把(0)型常量$*^{\beta}R$对应到$*^{\beta+1}R$。根据$T_{\beta+1}$，$*^{\beta}\Gamma$的每个常量a，它在$\tilde{\Gamma}_{\beta+1}$所对应的那个常量被记为$T_{\beta+1}a$，而且a与$T_{\beta+1}a$的类型相同。$\tilde{\Gamma}_{\beta+1}$的对象被称为第$\beta+1$相的内对象。在不必拘泥的情况下，我们把$\tilde{\Gamma}_{\beta+1}$与$*^{\beta}\Gamma$看成是同一的。称$\tilde{\Gamma}_{\beta+1}$的对象为第$\beta+1$相的内对象。${}_{\beta+1}\Gamma$的不属于$*^{\beta}\Gamma$的对象被称为第$\beta+1$相的外对象。称$T_{\beta+1}$为$*^{\beta}\Gamma$到$*^{\beta+1}\Gamma$的嵌入算子。

2. 含变量的关系的对应　若$A(x_1,\cdots,x_i,a_1,\cdots,a_j)$是$*^{\beta}M$的一个关系，其中$x_1,\cdots,x_i$是变量，$a_1,\cdots,a_j$是常量，$1\leqslant i+j$ i与j是非负整数，通过$T_{\beta+1}$变成$*^{\beta+1}M$的关系$*A(x_1,\cdots,x_i,$ $*a_1,\cdots,*a_j)$。但需注意，前者变量的变域在$*^{\beta}\Gamma$中，后者在$*^{\beta+1}\Gamma$中。

又若$B(x_1,\cdots,x_i,b_1,\cdots b_j)$是$*^{\beta+1}M$的关系，其中$x_1,\cdots,$ x_i是变量，$b_1,\cdots,b_j$是常量，$1\leqslant i+j$，i与j是非负整数，则在$*^{\beta}M$中存在关系$A(x_1,\cdots,x_i,y_1,\cdots,y_j)$，使得$T_{\beta+1}A=B$，或者更明确一点写成

$$(T_{\beta+1}A)(x_1,\cdots,x_i,y_1,\cdots,y_j)=B(x_1,\cdots,x_i,y_1,\cdots y_j),$$

这里$y_1,\cdots,y_j$是变量，而且在$*^{\beta}\Gamma$中存在常量$a_1,\cdots,a_j$使得$A(x_1,\cdots,x_i,a_1,\cdots,a_j)$是$*^{\beta}M$中的关系。注意，关系式中每个位置上的类型是确定的。

3. 由$*^{\beta}M$到$*^{\beta+1}M$的命题或语句的转换　设s是$*^{\beta}M$的一个命题或语句，通过$T_{\beta+1}$将s中的每个常量，如a，都换为$T_{\beta+1}a$，又将s中的变量的变域扩大为$*^{\beta+1}\Gamma$中同型的全体常量，那么s就变为在$*^{\beta+1}M$成立的一个命题或语句。

4. 由$*^{\beta+1}M$到$*^{\beta}M$的命题或语句的转换　设p是$*^{\beta+1}M$的一个命题或语句，如果其中所有的常量$b_1,\cdots,b_j\in\tilde{\Gamma}_{\beta+1}$，即它们是第$\beta+1$相的内对象，只要将$p$中的变量的变域限制到

$\tilde{\Gamma}_{\beta+1}$中同型常量的全体，则p变为在$*^{\beta}M$成立的命题或语句。如果在常量之中有几个，譬如$b_1, \cdots, b_i, i \leqslant j$，不属于$\tilde{\Gamma}_{\beta+1}$，则一定存在$a_1, \cdots, a_i \in \tilde{\Gamma}_{\beta+1}$，它们的型依次与$b_1, \cdots, b_i$相同。在$p$中依次以$a_1, \cdots, a_i$替换$b_1, \cdots, b_i$，并将变量的变域限制到$\tilde{\Gamma}_{\beta+1}$，所得到的命题或语句在$*^{\beta}M$是成立的。

与§5的讨论类似，不难看出：

1. $*^{\beta+1}M$中有些句子在$*^{\beta}M$中是没有的，故$*^{\beta+1}M$是$*^{\beta}M$的真扩大。

2. $M_{\beta+2}$中的确存在不属于$*^{\beta+1}M$的外命题和外对象，如完备性公理在$M_{\beta+2}$不成立，但在$*^{\beta+1}M$仍然成立，等等。

对于§6的命题转换的三原则，这里也可以作相应的推广。对于每个i，$1 \leqslant i$，$*^{i}M$是M_{i+1}的子理论，如何将$*^{i}M$的公式表为M_{i+1}的公，式我们采用以下三原则

(49,3)　1. 若对某个$j \in N$，$A(a_1, \cdots, a_j)$是M_{i+1}的一个关系式，则：在$*^{i}M$中$A(a_1, \cdots, a_j)$成立$\longleftrightarrow$在M_{i+1}中成立$A \in *^{i}\Gamma \wedge a_1 \in *^{i}\Gamma \wedge \cdots \wedge a_j \in *^{i}\Gamma \wedge A(a_1, \cdots, a_j)$；

2. 若$A(x)$是M_{i+1}的关系式，x是变量，则：在$*^{i}M$成立$(\forall x)A(x) \longleftrightarrow$在$M_{i+1}$成立$A \in *^{i}\Gamma \wedge (\forall x)[x \in *^{i}\Gamma \longrightarrow A(x)]$；

3. 若$A(x)$是M_{i+1}的关系式，x是变量，则：在$*^{i}M$成立$(\exists x)A(x) \longleftrightarrow$在$M_{i+1}$成立$A \in *^{i}\Gamma \wedge (\exists x)[x \in *^{i}\Gamma \wedge A(x)]$.

这里$x \in *^{i}\Gamma$表示x的变域在$*^{i}\Gamma$之中。至于怎么使用这些原则，请参看第二至第四章的讨论，这里不再重复。

§50　不同相的无限大和无限小

为了方便，我们引入以下记号。设$*^{0}M = M$，$*^{0}\Gamma = \Gamma$，

$*^0N=N$和$*^0R=R$。又对i和j满足$0\leqslant i<j$，如果常量a是$*^i\Gamma$的某型个体，则记

(50,1) $$*_{(j,i)}a=T_jT_{j-1}\cdots T_{i+1}a,$$

这里T_{i+1}是把$*^i\Gamma$嵌入$*^{i+1}\Gamma$的算子，T_j是把$*^{j-1}\Gamma$嵌入$*^j\Gamma$的算子，等等。又特别记

$$*^ja=*_{(j,0)}a.$$

例如，在M中积分号为"$\int$"，在$*^iM$中则为"$*^i\int$"，依此类推，不再重复。

对$i\geqslant 0$，我们记

(50,2) $$\begin{cases}R_{i+1}=*^iR=T_i\cdots T_1T_0R\\ N_{i+1}=*^iN=T_i\cdots T_1T_0N\end{cases}$$

这里T_0为恒等映射。

我们明确一下称呼：称R_i为第i相的实数线，N_i为第i相的自然数集，M_i为第i相的微积分理论，$*^{i-1}M$为第i相的内的微积分理论，这里$1\leqslant i$。

进一步，对$1\leqslant i<j$，我们引入以下定义

(50,3) $$R_{j,i}=\{x\mid x=*_{(j-1,\ i-1)}t\wedge t\in R_i\}$$

(50,4) $$N_{j,i}=\{x\mid x=*_{(j-1,\ i-1)}t\wedge t\in N_i\}.$$

由公设（49,1）可知：$R_{j,i}$是R_j的真子集且与R_i代数同构，$N_{j,i}$是N_j的真子集且与N_i代数同构。进一步，记

(50,5) $$\mathrm{mon}_{j,i}(0)=\bigcup_{n\in N_{j,i}}\left(-\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right),$$

称$\mathrm{mon}_{j,i}(0)$为(j,i)零单子。进一步定义

(50,6) x是(j,i)无限小$\longleftrightarrow x\in R_j\wedge x\in\mathrm{mon}_{j,i}(0)$，

x是(j,i)正无限小$\longleftrightarrow x$是(j,i)无限小$\wedge\ 0<x$，

x是(j,i)负无限小$\longleftrightarrow x$是(j,i)无限小$\wedge\ x<0$，

x是(j,i)有限数$\longleftrightarrow x\in R_j\wedge(\exists y)[y\in R_{j,i}\wedge$

$|x|<|y|]$,

x是(j,i)正有限数$\longleftrightarrow x$是(j,i)有限数$\wedge 0<x$,

x是(j,i)负有限数$\longleftrightarrow x$是(j,i)有限数$\wedge x<0$,

x是(j,i)无限大$\longleftrightarrow x\in R_j\wedge(\forall y)[y\in R_{i,n}\longrightarrow|y|<|x|]$,

x是(j,i)正无限大$\longleftrightarrow x$是(j,i)无限大$\wedge 0<x$,

x是(j,i)负无限大$\longleftrightarrow x$是(j,i)无限大$\wedge x<0$.

上式中绝对值"$|\,|$"的定义读者不难直接作出.

此外，对$i,j,k,n\in N$，读者可以自己验证以下结论：

(50,7) 若x是(j,i)无限大，则$\frac{1}{x}$是(j,i)无限小；

(50,8) 若x是(j,i)无限小且$x\neq 0$，则$\frac{1}{x}$是(j,i)无限大；

(50,9) 若$k<i<j$，则：x是(j,i)无限小$\longrightarrow x$是(j,k)无限小，x是(j,k)有限数$\longrightarrow x$是(j,i)有限数，x是(j,i)无限大$\longrightarrow x$是(j,k)无限大；

(50,10) 若$i<j<n$，则：x是(j,i)无限小$\longrightarrow x$是(n,i)无限小，x是(j,i)有限数$\longrightarrow x$是(n,i)有限数，x是(j,i)无限大$\longrightarrow x$是(n,i)无限大；

(50,11) 若$i<j\leqslant k<n$，x是(j,i)无限大，y是(n,k)无限大，则$\frac{x}{y}$是$(n,1)$无限小；

(50,12) 若$i<j\leqslant k<n$，x是(j,i)正无限小，y是(n,k)正无限小，则$\frac{y}{x}$是$(n,1)$正无限小.

如果对任意的$1\leqslant i<j\leqslant k<n$，从$x$是$(j,i)$无限大和$y$是$(n,k)$无限大可推得$\frac{x}{y}$是$(n,k-j+1)$无限小，则称扩大的序列$M$，$*M$，…，$*^{\beta}M$，$*^{\beta+1}M$…是等步的。

仿照Robinson[46]，我们可以引进以下定义

(50,13)　若$x\in R_i$和r是(j,i)有限数，则称x是r的(j,i)标准部分，记作$x=\mathrm{st}_{j,i}(r)$，如果$r\in mon_{j,i}({}^*{}_{(j-1,i-1)}x)$，

后者的定义是

(50,14)　$r\in \mathrm{mon}_{j,i}\ ({}^*{}_{(j-1,i-1)}x)\longleftrightarrow (r-{}^*{}_{(j-1,i-1)}x)\in \mathrm{mon}_{j,i}(0)$，

上式中$i,j\in N$且$i<j$.

§51　关于Dirac Delta函数的补充说明

§33中关于Dirac Delta 函数的第一种定义，可以作如下推广

(51,1)　设$i,j\in N$且$i<j$，$q\subset {}^{*\,i-1}\mathrm{ft}(R_i,R_i)$，$p\in {}^{*\,i-1}\mathrm{ft}(R_j,R_j)$，${}^{*\,j-1}[p\,{}^*{}^*{}_{(j-1,i-1)}q$在${}^{*\,i-1}(-\infty,+\infty)$黎曼可积]，在这些条件下，我们称$p$是$q$在${}^{*\,j-1}(-\infty,+\infty)$的$(j,i)$Delta函数，如果$\mathrm{st}_{j,i}\left\{{}^{*\,j-1}\int_{x\in R_j} p(x)\,{}^*{}_{(j-1,i-1)}q\,(x)\ dx\right\}=q(0)$.

【例 1】　如果在${}^{*\,i-1}M$中研究函数

(51,2)
$$y=\Phi(\xi)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,{}^{*\,i-1}\int_0^{\xi} e^{-t^2}dt.$$

设b是(j,i)正无限小，$bB=1$.令$\xi=Bx$，那么

(51,3)
$$y=\Phi(Bx)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,{}^{*\,j-i}\int_0^{Bx} e^{-t^2}dt.$$

而且成立

(51,4)
$$^{*\,i-1}\frac{dy}{dx}=2\delta_{1,j,i}(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} *^{i-1} e^{-(\frac{x}{b})^2}.$$

类似于命题（33,12），我们有以下结论

(51,5)　　若$q \in *^{i-1}\mathrm{ft}(R_i, R_i)$，对任何$t_1, t_2 \in R_i$且$t_1 < t_2$成立$q \in *^{i-1}C([t_1, t_2])$，又存在$s_1, s_2 \in R_i$，$s_1 > 0$，$s_2 > 0$，且对任何$x \in R_i$成立

$$|q(x)| \leqslant s_1 *^{i-1} e^{s_2 x^2},$$

则$\delta_{1,j,i}(x)$是$q(x)$在$*^{i-1}(-\infty, +\infty)$上的$(j, i)$ Delta函数。

证明从略。

§34中关于Dirac Delta函数的第二种定义，可以作如下推广

(51,6)　　设$i, j \in N$，$i < j$，B_1是(j, i)正无限大，以Θ记区间$[-B_1, B_1]$，$q \in *^{i-1}\mathrm{ft}(R_i, R_i)$，$p \in *^{i-1}\mathrm{ft}(\Theta, R_i)$，对任何$s_1, s_2 \in R_i$且$s_1 < o$和$s_2 > o$，设$*^{i-1}[p *_{(j-1, i-1)} q$ 在$[s_1, s_2]$ 黎曼可积]，在上述条件下，我们称p是q在$*^{i-1}(-\infty, +\infty)$上的$(j, i)$Delta函数，如果成立

$$*^{i-1}\lim_{\substack{s_1 \to *^{i-1}(-\infty) \\ s_2 \to *^{i-1}(+\infty)}} \mathrm{st}_{j,i} \left\{ *^{i-1}\int_{s_1}^{s_2} p(x) *_{(j-1, i-1)} q(x)\, dx \right\} = q(0).$$

关于Dirac Delta函数的第二种定义的有关例题，这里就不再讨论了。

以下把§36的结果作相应的推广。类似于(36,24)，在$*^{i-1}M$中我们设

(51,7)　　$f \in *^{i-1}\mathrm{ft}(R_i, R_i)$，$f \in *^{i-1}C(R_i)$，$i \in N$，又

$n\in {}^{*i-1}N$, $1\leqslant k\leqslant n$, $\alpha\in {}^{*i-1}\mathrm{ft}({}^{*i-1}\{1,n\},R_i)$

且满足不等式：

$${}^{*i-1}(-\infty)=\alpha(0)<\alpha(1)<\alpha(2)<\cdots<\alpha(n)$$
$$<{}^{*i-1}(+\infty)=\alpha(n+1);$$

当$\alpha(k)<x<\alpha(k+1)$，又设

$f(x)=(-1)^{j+k}f_k(x)$,

这里$k=0,1,\cdots,n+1$，$j\in N$，而且$f_k(x)\geqslant 0$；

最后，设${}^{*i-1}[f(t)$在${}^{*i-1}(-\infty,+\infty)$黎曼可积]且成立

$${}^{*i-1}\int_{R_i}f(t)dt=1.$$

然后，我们指出以下定理

(51,8) 若$q\in {}^{*i-1}\mathrm{ft}(R_i,R_i)$，对任何$t_1$，$t_2\in R_i$有$q\in {}^{*i-1}C([t_1,t_2])$，又存在$m\in R_i$使得对任何的$x\in R_i$成立${}^{*i-1}|q(x)|\leqslant m$，又$f(t)$满足（51,7）中的条件，$B$是$(j,i)$正无限大，则$Bf(Bx)$是$q(x)$在${}^{*i-1}(-\infty,+\infty)$上的$(j,i)$Delta函数.

证明从略。在（51,8）中，函数f应自然地对应到${}^{*i-1}\Gamma$中去。

以下推广条件(36,47)。我们设

(51,9) $f\in {}^{*i-1}\mathrm{ft}(R_i,R_i)$，$f\in {}^{*i-1}C(R_i)$，${}^{*i-1}[f(t)$在$(-\infty,+\infty)$黎曼可积]，且

$${}^{*i-1}\int_{R_i}f(t)dt=1.$$

然后不难看出以下定理

(51,10) 若$q\in {}^{*i-1}\mathrm{ft}(R_i,R_i)$，对任何的$t_1,t_2\in R_i$成立$q\in {}^{*i-1}C([t_1,t_2])$和${}^{*i-1}[q$在$[t_1,t_2]$有界变化]，又存在$m\in R_i$使得对任何$x\in R_i$成立${}^{*i-1}|q(x)|$

$\leqslant m$，又设$f(t)$满足(51,9)，B是(j,i)正无限大，则$Bf(Bx)$是$q(x)$在$*^{i-1}(-\infty,+\infty)$的(j,i)Delta函数。

证明从略。

§36的其他结果也可推广到现在的情况，这里就不详细讨论了。

在本节最后，简单地推广一下§38的结果。

在$*^{i-1}M$中，设$a<b$，$\{\varphi_n(x),\ n\in N_i\}$是$[a,b]$上的完全正交归一的函数序列，它满足

$$(51,11)\qquad *^{i-1}\int_a^b \varphi_j^+(x)\varphi_k(x)dx=\delta_{j,k},$$

这里$j,k\in N_i$，$\varphi_j^+(x)$为$\varphi_j(x)$的复共轭，又

$$(51,12)\qquad \delta_{j,k}=\begin{cases}1, & j=k\\ 0, & j\neq k.\end{cases}$$

设$f(x)\in *^{i-1}L_2[a,b]$，定义

$$(51,13)\qquad f_{\infty_i}(x)=*^{i-1}\sum_{n\in N_i}a_n\varphi_n(x)$$

其中

$$(51,14)\qquad a_n=*^{i-1}\int_a^b f(x)\varphi_n^+(x)dx.$$

将(51,14)代入(51,13)得

$$(51,15)\qquad f_{\infty_i}(x)=*^{i-1}\sum_{n\in N_i}*^{i-1}\int_a^b\varphi_n^+(y)\varphi_n(x)f(y)dy$$

$$=*^{i-1}\lim_{k\to\infty}*^{i-1}\sum_{n=1}^{k}*^{i-1}\int_a^b\varphi_n^+(y)\varphi_n(x)f(y)dy$$

把定理(16,36)推广一点，就可得到

(51,16) $$f_{\infty_i}(x)=\mathrm{st}_{j,i}\left\{ *^{i-1}\sum_{n=1}^{K} *^{i-1}\int_a^b \varphi_n^+(y)\varphi_n(x) f(y)dy\right\}$$

$$=\mathrm{st}_{j,i}\left\{ *^{i-1}\int_a^b f(y)\cdot *^{i-1}\sum_{n=1}^{K}\varphi_n^+(y)\varphi_n(x)dy\right\},$$

这里$K\in N_j$是(j,i)正无限大，而f和φ等自然地由$*^{i-1}M$转到$*^{i-1}M$。

我们设$\{\varphi_n(x),\ n\in N_i\}$在$*^{i-1}M$是完全的，这就是说，$f(x)$与$f_{\infty_i}(x)$在$*^{i-1}L_2[a,b]$中相等。

在$*^{i-1}M$中对一切$k\in N_i$，令

(51,17) $$\delta_{j,i}(k,x,y)=*^{i-1}\sum_{n=1}^{k}\varphi_n^+(y)\varphi_n(x).$$

于是成立

(51,18) $$f_{\infty_i}(x)$$

$$=\mathrm{st}_{j,i}\left\{ *^{i-1}\int_a^b \delta_{j,i}(K,x,y)f(y)dy\right\}.$$

这样，$*^{i-1}M$中的函数$\delta_{j,i}(K,x,y)$构成$*^{i-1}L_2[a,b]$到$*^{i-1}L_2[a,b]$的单位算子。我们仍称$\delta_{j,i}(K,x,y)$为$*^{i-1}L_2[a,b]$上的二元(j,i)Delta函数。

以上讨论的是广义傅里叶级数所产生的二元(j,i)Delta函数，以下将讨论由广义傅里叶变换所产生的二元(j,i)Delta函数。

若在$*^{i-1}M$中对$\lambda,x\in R_i$给出了二元函数

(51,19) $$\varphi(\lambda,x),$$

以$\varphi^+(\lambda,x)$表示它的复共轭函数。

此外，设Φ是$*^{i-1}\mathrm{ft}(R_i, R_i)$的某个子集，不伤一般性，可设$\Phi$包含$*^{i-1}C_0^\infty(R_i)$为它的子集。

现在对$\alpha \in R_i$且$\alpha > 0$定义

$$(51,20)\qquad \Delta(\alpha, \lambda, \lambda') = *^{i-1}\int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi^+(\lambda', x)\varphi(\lambda, x)dx.$$

如果当α是(j,i)无限大时，对$f \in \Phi$成立

$$(51,21)\qquad \mathrm{st}_{j,i}\left(*^{i-1}\int_{R_i} f(\lambda')\Delta(\alpha, \lambda, \lambda')d\lambda'\right) = f(\lambda),$$

则称$\varphi(\lambda, x)$对Φ按λ构成正交归一的连续系统，又称$\Delta(\alpha, \lambda, \lambda')$为$\Phi$上的二元$(j,i)$Delta函数。

进一步，对$\beta \in R_i$且$\beta < 0$定义

$$(51,22)\qquad \delta(\beta, x, y) = *^{i-1}\int_{-\beta}^{\beta} \varphi^+(\lambda, x)\varphi(\lambda, y)d\lambda.$$

如果当β是(j,i)无限大时，对$f \in \Phi$成立

$$(51,23)\qquad \mathrm{st}_{j,i}\left\{*^{i-1}\int_{R_i} \delta(\beta, x, y)f(y)dy\right\} = f(x)$$

则称$\varphi(\lambda, x)$对Φ按x是完全的，又称$\delta(\beta, x, y)$为Φ的二元(j,i) Delta函数。

如果（51,19）中的$\varphi(\lambda, x)$，其相应的$\Delta(\alpha, \lambda, \lambda')$和$\delta(\beta, x, y)$，当$\alpha$和$\beta$为$(j,i)$正无限大时，都是$\Phi$上的二元（$j,i$）Delta函数，则称$\varphi(\lambda, x)$对$\Phi$构成完全的（对$x$）正交归一的（对$\lambda$）连续系统。

特别，当$\varphi(\lambda, x)$中的λ和x是对称的时候，成立

$$(51,24)\qquad \delta(\beta, x, y) = \Delta(\beta, x, y),$$

这时，$\varphi(\lambda, x)$对Φ的完全正交归一性由一个(j,i)Delta函数所

刻画。

§52 关于奇异积分的补充说明

第七章中关于两相微积分的结果都可以在多相微积分中加以推广，这里只对§39的情况作一些补充说明，至于其他情况，读者可以自己作出相应的推广。

若$i,j\in N$，$i<j$，在M_i可以引入以下定义

(52,1) 若$a,b\in R_i, a<b, q\subset *^{i-1}[a,b]$和$f\in *^{i-1}\mathrm{ft}(*^{i-1}[a,b]\backslash q, R_i)$称$g$是$f$在$*^{i-1}[a,b]$的黎曼可积（或$*^{i-1}L$可积）的$*^{i-1}M$近似延拓，如果$g\in *^{i-1}\mathrm{ft}*(*^{i-1}[a,b], R_i$(或$j$相复数域)), $*^{i-1}$[g在$[a,b]$黎曼可积（或L可积)], 和对每个$x\in *^{i-1}[a,b]\backslash q$和$y\in \mathrm{mon}_{i,j}(*_{(j-1,i-1)}x)$成立$g(y)-*_{(j-1,i-1)}f(y)$是$(j,i)$无限小。

进一步可以引入定义

(52,2) 若$a,b\in R_i, a\angle b$,
$q\subset *^{i-1}[a,b]$和$f\in *^{i-1}\mathrm{ft}(*^{i-1}[a,b]\backslash q, R_i)$, g是f在$*^{i-1}[a,b]$的黎曼可积（或$*^{i-1}L$可积）的$*^{i-1}M$近似延拓，则称$*^{i-1}\int_a^b g(x)dx$是$*^{i-1}\int_a^b f(x)dx$在$*^{i-1}M$的一个（近似）解答。特别若$*^{i-1}\int_a^b g(x)dx$是(j,i)有限的，则称$\mathrm{st}_{,ji}(*^{j-1}\int_a^b g(x)dx)$是$*^{i-1}\int_a^b f(x)dx$的一个$i$相的解.

【例】 若$f(t)=t^2$，研究积分

$$(52,3)\qquad i(\lambda) = {}^{*j-1}\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt$$

我们取σ是(j,i)正无限小，在${}^{*j-1}M$中取函数

$$(52,4)\qquad g_1(t) = \begin{cases} t^{\lambda}, & \sigma \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \sigma^{\lambda} + K(t-\sigma), & 0 \leqslant t < \sigma, \end{cases}$$

那么g_1是f在${}^{*j-1}\left[0, \frac{1}{2}\right]$的黎曼可积的${}^{*j-1}M$的近似延拓。这样，当$\lambda \neq -1$，我们有

$$(52,5)\qquad I_1(\lambda) = {}^{*j-1}\int_0^{\frac{1}{2}} g_1(t)dt$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda+1}\sigma^{\lambda+1} + \frac{1}{\lambda+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda+1} - \frac{K}{2}\sigma^2;$$

当$\lambda = 1$，我们有

$$(52,6)\qquad I_1(\lambda) = {}^{*j-1}\int_0^{\frac{1}{2}} g_1(t)dt = \ln\frac{1}{2\sigma} + 1 - \frac{K}{2}\sigma^2.$$

当K在R_j中变化时，$I_1(\lambda)$可以取到R_j中的任意值。这些都是$i(\lambda)$的解答，即$I_1(\lambda)$是${}^{*j-1}\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt$在${}^{*j-1}M$的一个（近似）解。

对第七章的其他内容，读者不难作出相应的推广。

总之，对M_i的某个奇异的内函数，如F，我们去寻找一个j，$i<j$，而把M_j中满足某些条件的非奇异的内函数，如G，看作是F的源泉（或近似延拓）。这样，我们把M_i中有关F的奇异问题转化为M_j中有关G的非奇异问题；或者反过来说，我们讨论的对象本来是M_i中非奇异的内函数，但由于认识上的

局限性，放在M_i中讨论。这时G的近似表达为F，而F在M_i具有奇异性。为了消去这种奇异性，最好的办法是回到M_j中，找出F的源泉G，以求得问题的合理解决。作者希望，这样思想将有助于研究数学和物理力学、特别是量子力学中各种与奇异函数和奇异积分有关的各种问题。

关于奇异函数和发散积分的处理方法很多，本书仅仅是抛砖引玉而已。

§53 傅里叶级数与傅里叶变换的关系

在M设$f\in \mathrm{ft}(R,R)$，它在$(-\infty,+\infty)$绝对可积，$f\in C(R)$，而且设每个$x\in R$，都存在一个邻域使得$f(x)$在此邻域内有界变化。

进一步，对每个$i\in N$，我们把$f(x)$逐次映射到$*^{i-1}M$中去。为了简便，我们常常把$*^{i-1}f(x)$仍记为$f(x)$。这样，我们可以说$f\in *^{i-1}\ \mathrm{ft}(R_i,R_i)$，$*^{i-1}$〔$f(x)$在$R_i$绝对可积分〕，$f\in *^{i-1}\ C(R_i)$，而且$*^{i-1}$〔对每个$x\in R_i$都存在一个邻域使得$f(x)$在此邻域中有界变化〕。

首先，在上述条件下，在M成立以下的傅里叶积分公式

$$(53,1)\qquad f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos z(u-x)du$$

$$=\lim_{Z\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{Z}dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos z(u-x)du=\mathrm{st}(I_1),$$

这里我们令

$$(53,2)\qquad I_1=\frac{1}{\pi}*\int_0^{Z_1}dz*\int_{*R}f(u)\cos z(u-x)du$$

这里Z_1是(2,1)正无限大

进一步设$Z_1=k\pi/l$，$k\in *N$，$z_m=m\pi/l$，于是成立

(53,3) $$I_1 = \frac{1}{\pi} {}^*\lim_{l={}^*\infty} {}^*\sum_{m=1}^{l} \frac{\pi}{l} {}^*\int_{{}^*R} f(u)\cos z_m(u-x)du$$

$$= \mathrm{st}_{3,2}\{I_2\},$$

其中

(53,4) $$I_2 = \frac{1}{\pi} {}^{*2}\sum_{m=1}^{K}{}' \frac{\pi}{L} {}^{*2}\int_{{}^{*2}R} f(u)\cos z_m(u-x)du,$$

这里$K=Z_1L/\pi$，$K\in {}^{*2}N$，L是(3,2)正无限大，$z_m=m\pi/L$，$z_m\in {}^{*2}R$。

进一步，还可看出

(53,5) $$I_2 = \frac{1}{\pi} {}^{*2}\sum_{m=1}^{K}{}' \frac{\pi}{L} \cdot {}^{*2}\lim_{S\to {}^{*2}\infty} {}^{*2}\int_{-S}^{+S} f(u)\cos z_m(u-x)du$$

$$= \mathrm{st}_{4,3}\{I_3\},$$

其中

(53,6) $$I_3 = \frac{1}{\pi} {}^{*3}\sum_{m=1}^{K} \frac{\pi}{L} {}^{*3}\int_{-S}^{+S} f(u)\cos z_m(u-x)du,$$

这里S是(4,3)正无限大。由于$f(u)$的绝对可积性，令

(53,7) $$\Delta_3(z_m) = {}^{*3}\int_{-S}^{S} f(u)\cos z_m(u-x)du - {}^{*3}\int_{-L}^{L} f(u)\cos z_m(u-x)du.$$

则不难看出

(53,8) $\mathrm{st}_{4,3}\Delta_3(z_m)$

$$= \mathrm{st}_{4,3} {}^{*3}\int_{L<|u|<S} f(u)\cos z_m(u-x)\,du$$

$$= {}^{*2}\lim_{S\to {}^{*2}\infty} {}^{*2}\int_{L<|u|<S} f(u)\cos z_m(u-x)\,du$$

$$= \Delta_2(z_m)$$

$$= {}^{*2}\int_{L<|u|\,{}^{*2}\infty} f(u)\cos z_m(u-x)\,du.$$

又不难看出

(53,9) $\quad \mathrm{st}_{3,2}\Delta_2(z_m)$

$$= \Delta_1(z_m) = {}^{*}\lim_{l\to {}^{*}\infty} {}^{*}\int_{l<|x|<{}^{*}\infty} f(u)\cos z_m(u-x)\,du.$$

由于$f(u)$的绝对可积分，不难看出

(53,10) $\quad \Delta_1(z_m) = {}^{*}0,$

即$\Delta_1(z_m)$是$*R$中的零。故$\Delta_2(z_m)$是(3,2) 无限小，$\Delta_3(z_m)$是(4,2) 无限小。

现在将 (53,6) 中的I_3表示为

(53,11) $$I_3 = \frac{1}{\pi}{}^{*3}\sum_{m=1}^{K} \frac{\pi}{L}\Delta_3(z_m)$$

$$+ \frac{1}{\pi}{}^{*3}\sum_{m=1}^{K} \frac{\pi}{L}{}^{*3}\int_{-L}^{L} f(u)\cos z_m(u-x)\,du.$$

$$= I_4 + I_5.$$

这里I_4和I_5依次表示 (53,11)右端的两项。

现在估计I_4，令

(53,12) $$\varepsilon = {}^{*3}\max_{1\leqslant m\leqslant K}|\Delta_3(z_3)|,$$

则ε是(4,2) 无限小。由此得

(53,13) $$\left|I_4\right| = \frac{1}{\pi}\left|{}^{*3}\sum_{m=1}^{K} \frac{\pi}{L}\Delta_3(z_m)\right|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{\pi} *^3 \sum_{m=1}^{K} \frac{\pi}{L} = \frac{\varepsilon K}{L}$$

$$= \frac{\varepsilon}{L} \cdot \frac{Z_1 L}{\pi} = \frac{\varepsilon Z_1}{\pi}.$$

由(50,12,)知εZ_1是(4,1)无限小，故I_4是(4,1)无限小。

我们还有

(53,14) $\quad \mathrm{st}_{4,3} I_5 = I_6$

$$= \frac{1}{\pi} *^2 \sum_{m=1}^{K} \frac{\pi}{L} \cdot *^2 \int_{-L}^{L} f(u) \cos z_m (u-x) du.$$

另一方面，在$*^2M$中我们研究$*^2f(x)$的傅里叶级数．为此令

(53,15) $$f_2(x) = \begin{cases} *^2f(x), & -L < x \leqslant L \\ \text{周期函数}, & x \in R_3. \end{cases}$$

我们将$f_2(x)$展成三角级数，当$-L<x<L$时，成立

(53,16) $$f_2(x) = \frac{a_0}{2} + *^2 \sum_{m \in N_3} \left\{ a_m \cos \frac{m\pi x}{L} + b_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right\},$$

其中的傅里叶系数a_m和b_m的表示如下

(53,17) $$a_m = \frac{1}{L} *^2 \int_{-L}^{L} f_2(u) \cos \frac{m\pi u}{L} du,$$

$$m = 0 \text{或} m \in N_3$$

和

(53,18) $$b_m = \frac{1}{L} *^2 \int_{-L}^{L} f_2(u) \sin \frac{m\pi u}{L} du,$$

$m \in N_3$.

将(53,17)和(53,18)代入(53,16)得

$$(53,19)\qquad f_2(x)=\frac{1}{2L}{}^{*2}\int_{-L}^{L}f_2(u)du$$
$$+{}^{*2}\sum_{m\in N_3}\frac{1}{L}{}^{*2}\int_{-L}^{L}f_2(u)$$
$$\cos\frac{m\pi(u-x)}{L}du.$$

如果在${}^{*2}M$中以$s_K(x)$记(53,19)右端三角级数的部分和，即

$$(53,20)\qquad s_K(x)=\frac{1}{2L}{}^{*2}\int_{-L}^{L}f_2(u)du$$
$$+{}^{*2}\sum_{m=1}^{K}\frac{1}{L}{}^{*2}\int_{-L}^{L}f_2(u)$$
$$\cos\frac{m\pi(u-x)}{L}du.$$

由 $f(x)$ 在 M 的绝对可积性，并注意到（53,15），所以 ${}^{*2}\int_{-L}^{L}f_2(u)du$是（3,1)有限的，从而可得

$$\frac{1}{2L}{}^{*2}\int_{-L}^{L}f_2(u)du$$

是（3,2)无限小。因此得到$f_2(x)$的傅里叶级数的部分和$s_K(x)$与I_6之间的差别是（3,2)无限小。

我们再回忆一下：

1.由（53,1）和（53,2）知$f(x)$与I_1的差别是（2,1）无限小。

2.由（53,3）和（53,4）知I_1与I_2的差别是（3,2）无限小。

3.由（53,5）和（53,6）知I_2与I_3的差别是（4,3）无限小。

4.由（53,11）和（53,13）知I_3与I_5的差别是（4,1)无限小。

5.由（53,14）知I_5和I_6的差别是（4,3）无限小。

6.由（53,20）知I_6与$s_K(x)$的差别为（3,2）无限小。

总结以上六点，知$S(x)$与$f(x)$之差为（4,1)无限小，只要x满足$-L<x<L$.特别当$x\in R$时，我们有，$s_K(x)$与$f(x)$之差为(4,1）无限小。

这就是说，在M_4中讨论，$*^3M$为M_4的内的理论。这时，$*^2M$中的三角级数的部分和$s_K(x)$与（53,1)右端的傅里叶积分

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos z(u-x)du$$

之差为(4,1)无限小。

作为一个附带的结果，可以看出$s_K(x)$与(53,16)右端的三角级数的差为（4,1）无限小。请注意，这里$K=Z_1L/\pi$，Z_1仅是（2,1)无限大。

关于由傅里叶级数导出傅里叶变换，在〔1〕的三卷三分册540～542和〔24〕的§4都有着不太严格的讨论，读者可以进行比较。

参 考 文 献

〔1〕 菲赫金哥尔茨，微积分学教程，商务印书馆。

〔2〕 关肇直，数学推理的严格性与认识论中的实践标准，数学学报，19卷1期

〔3〕 盖尔芳特和希洛夫，广义函数，科学出版社，1965

〔4〕 黄乘规，两相微积分学，华中工学院学报，1979，№.2

〔5〕 黄乘规，论单位阶跃函的非标准谱函数，湘潭师专学报，1982，№.1

〔6〕 胡世华，古型谓词演算，数学进展，第7卷，4期

〔7〕 吉尔巴格和塔丁格，二阶椭圆型偏微分方程，上海科学技术出版社

〔8〕 卡尔台龙，奇异积分算子，上海科学技术出版社

〔9〕 柯朗和希尔伯特，数学物理方法，科学出版社

〔10〕 拉甫伦捷也夫，复变函数论方法

〔11〕 雷日克，函数表与积分表，高教出版社

〔12〕 列别捷夫，特殊函数及其应用，高教出版社

〔13〕 米赫林，多维奇异积分和积分方程

〔14〕 米库辛斯基，算符演算

〔15〕 史捷班诺夫，微分方程教程

〔16〕 史奈登，傅里叶变换

〔17〕 石最坚和黄乘规，关于δ函数奇异性的问题，华中工学学报，1980，№.2

〔18〕 谭天荣，单位阶跃函数的谱函数问题，湘潭师专学报，1981，2

〔19〕 谭天荣，再谈单位阶跃函数的谱函数问题，湘潭师专学报，1981，2

〔20〕 王进儒，Dirac Delta函数与无穷小分析，1979

〔21〕 希尔伯脱和阿克曼，数理逻辑基础，1958

〔22〕 袁萌，非标准分析及其应用简介，自然科学争鸣，1977，2

〔23〕 袁萌，什么是非标准分析，1977，4

〔24〕 伊凡宁柯，经典场论，科学出版社，1958

〔25〕 张锦文，数理逻辑与微积分的逻辑基础，河南新乡师院，1978，

〔26〕 张锦文，点的可分性与非标准分析，自然科学争鸣，1977，2

〔27〕 张锦文，非标准分析——当代数学的一个新领域，自然科学争鸣，1977，4

〔28〕 章善良，也谈单位阶跃函数的谱函数问题，湘潭师专学报，1981，2

〔29〕 中国科学院数学所资料室，数学的历史，逻辑和基础资料选辑，非标准分析，1976

〔30〕 周毓麟，非线性椭圆型方程与非线性抛物型方程，1957

〔31〕 周世勋，量子力学教程

〔32〕 Agmon, S. A. Douglis and L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic parial differential eguations satisfying general lqundary conditions. I, Comm. Pure Appl. math. 12, 623-727 (1959), II Comm. Pure Appl. Math. 17, 35-92 (1964)

〔33〕 Bernstein, Allen R., A non-standard integration theory for unbounded functions. Z. math. fogik Grundlogen math. 20 (1974), 97-108

〔34〕 Bernstein, Allen R. and Peter A. Loeb, A non-standard integration theory for unbounded functions, Univ. Victoria, 1972

〔35〕 Church, A., Introduction to Mathematical logic, vol. I, 1956

〔36〕 Chang, C. C. and H. J. Keisler, Model theory, 1973

〔37〕 Douglis, A. and L. Nirenberg, Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations, Comm. Pure Appl. math. 8, 503-538 (1955)

〔38〕 Edward G.Harris, Introduction to modern Thoretical Physics, 1975

〔39〕 Fritz John, Plane waves and spherical means applied to partial differential eguations

〔40〕 Gino moretti, Functions of a complex variable

〔41〕 Keisler, H. I., Elementary Calculus, 1975

〔42〕 Lightstone, A. H. and Wang, Kam, Dirac Delta functions via nonstandard Analysis, Canad. Math. Bull. 1975, 759-762

〔43〕 Martin Davis and Reuben Hersh, Nonstandard Analysis, Scientific American, 1972

〔44〕 Osdol, D. H. Van, Truth with respect to An Ultrafiller or How to make Intuition Rigorous, Amer. math. monthly 79(1972)

〔45〕 Philip Hartman, Ordinary Differential Eguations

〔46〕 Robinson, A, Non-Standard Analysis, 1974

〔47〕 Shoenfield, J. R., mathematical Logic, 1967

〔48〕 Skolem, TH., Peano's Axioms and models of Arithmetic, Studies in Fogic,1955

〔49〕 Steen, L. A., New models of the Real-Number Line, Scientific American, 1971

〔50〕 Yvonne Choquet-Bruhat, Cecile Dewitt-morette, and Margret Dillard-Bleik, Analysis, manifold and Physics

〔51〕 Диткин, В. А., Справочник по операционному исчислению

〔52〕 Диткин, В.А. и Прудников, А.П., Операционное

исчисление

〔53〕 СМБ, Функциональный Анализ

〔54〕 张锦文，用力迫法构造的一个非标准的算术模型，华中工学院学报，1979，第一期

〔55〕 李邦河，非标准分析与广义函数的乘法，中国科学，1978年第1期和第2期

〔56〕 P.A.M.狄拉克，量子力学原理，科学出版社，1979

〔57〕 朱洪元，量子场论，科学出版社，1960

〔58〕 Martin Davis, Applied Nonstandard Analysis

〔59〕 Rajiu, CK., Products and compositions with the Dirac Delta funclion. Journal of physics A: Mathematical and general vol. 15, №. 2, February 1982